www.mruni.eu

TIKIMYBIŲ TEORIJA IR MATEMATINĖ STATISTIKA

Hamletas Markšaitis
Olga Navickienė

MYKOLO ROMERIO UNIVERSITETAS

Mykolo Romerio universitetas

Hamletas Markšaitis
Olga Navickienė

Tikimybių teorija ir matematinė statistika

Mokomasis leidinys

Vilnius, 2012

UDK 519.2(075.8)
Ma468

Recenzavo:

prof. dr. Antanas Laurinčikas, Vilniaus universitetas

prof. dr. Alfredas Račkauskas, Vilniaus universitetas

Mykolo Romerio universiteto Socialinės informatikos fakulteto Matematinio modeliavimo katedros 2011 m. birželio 21 d. posėdyje (protokolas Nr. 1MMK-4) pritarta leidybai.

Mykolo Romerio universiteto Socialinės informatikos fakulteto tarybos 2011 m. birželio 23 d. posėdyje (protokolas Nr. 2SI-8) pritarta leidybai.

Mykolo Romerio universiteto mokslinių-mokomųjų leidinių aprobavimo spaudai komisijos 2011 m. spalio 17 d. posėdyje (protokolas Nr. 2L-18) pritarta leidybai.

ISBN 978-9955-19-391-3

Turinys

Pratarmė

Mūsų gyvenimas pilnas atsitiktinumų. Galima net pajuokauti, jei kas nors įsitikinęs, kad visiškai valdo situaciją, tai galima tvirtinti, kad kažką pražiūrėjo. Net determinuoti procesai yra lydimi atsitiktinumų ir netikėtumų. Taigi atsitiktinumas gyvenime yra pagrindinis veikėjas.

Tikimybių teorija nagrinėja atsitiktinius įvykius, atsitiktinius dydžius ir jų pasiskirstymus. Jei kurio nors proceso ar bandymo metu gali būti įvairių baigčių galimybė, tai tikimybių teorija kiekvienos baigties galimybę grindžia skaičiumi, vadinamu įvykio tikimybe. Apdorojant duomenis ir formuluojant išvadas neįmanoma apsieiti be matematinės statistikos, kuri kaip tik yra grindžiama tikimybių teorijos faktais. Šioje knygoje išdėstomos tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pagrindinės sąvokos, faktai ir duomenų kai kurie statistiniai apdorojimo metodai.

Tikimybių teorija ir matematinė statistika turi daug taikymų ekonomikoje, medicinoje, draudime ir kitose žmonijos veiklos srityse. Ši knyga skirta studijuojantiems finansų ekonomiką, medicinos mokslus bei tiems, kurių profesija susiejusi su vienokios ar kitokios rizikos įvertinimu.

Knyga susideda iš aštuonių skyrių.

Pirmajame skyriuje nagrinėjami elementarūs kombinatorikos faktai. Apibrėžiami deriniai, gretiniai, kėliniai tiek be pasikartojimų,tiek ir su pasikartojimais. Šie faktai taikomi sprendžiant kombinatorinius klasikinės tikimybės uždavinius. Be to, yra įrodytų formulių, kokių nerasite kituose tikimybių teorijos vadovėliuose. Pateikta daug kombinatorikos uždavinių su sprendimais pavyzdžių.

Antrajame skyriuje apibrėžiami atsitiktiniai įvykiai, veiksmai su atsitiktiniais įvykiais. Veiksmai su atsitiktiniais įvykiais interpretuojami tiek tikimybių teorijos, tiek ir aibių teorijos terminų kalba. Apibrėžiamos diskrečiųjų atsitiktinių įvykių erdvės. Nagrinėjama daug pavyzdžių. Supažindinama su σ-algebros sąvoka.

Trečiajame skyriuje apibrėžiama tikimybinės erdvės sąvoka. Atskiru atveju paaiškinamos klasikinės, hipergeometrinės bei statistinės tikimybių sąvokos. Šiame skyriuje apibrėžiama sąlyginė tikimybė ir užrašoma pilnos tikimybės formulė. Nagrinėjama klasikinė Bernulio schema. Šiame skyriuje taip pat rasite daug pavyzdžių.

Ketvirtajame skyriuje nagrinėjami diskretieji atsitiktiniai dydžiai ir jų skaitinės charakteristikos: vidurkis, dispersija ir kiti. Pateikiami pavyzdžiai, įrodantys, kad tik iš atsitiktinių dydžių vidurkių visiškai nieko negalima spręsti apie pačius atsitiktinius dydžius.

Penktasis skyrius skirtas tolydžiųjų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo ir tankio funkcijoms. Pateikta daug tolydžiųjų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo ir tankio funkcijų pavyzdžių. Išnagrinėta daug uždavinių, atliekant veiksmus su tolydžiais atsitiktiniais dydžiais, randant to pasekmėje gautų atsitiktinių dydžių tankio funkcijas.

Šeštajame skyriuje nagrinėjamos tolydžiųjų atsitiktinių dydžių skaitinės charakteristikos. Pateikta daug pavyzdžių. Suformuluoti ribiniai dėsniai: centrinė ribinė teorema vienodai pasiskirsčiusiems atsitiktiniams dydžiams, kurių vidurkiai ir dispersijos baigtinės, ir Čebyševo nelygybė.

Septintasis skyrius skirtas matematinei statistikai. Pateikti įvairūs duomenų apdorojimo metodai, kriterijai vienokiai ar kitokiai hipotezei priimti ar atmesti. Išnagrinėti konkretūs pavyzdžiai.

Aštuntasis skyrius skirtas matematinės analizės faktams, reikalingiems nagrinėjant tolydžiuosius atsitiktinius dydžius ir jų pasiskirstymo funkcijoms.

Knygoje suformuluota daug uždavinių ir pateikti jų sprendimai. Tikimės, kad šie uždaviniai su sprendimais padės skaitytojui sėkmingai gilintis į tikimybių teorijos ir matematinės statistikos paslaptis.

1 Elementarioji kombinatorika

1.1 Žymenys

$\mathbb{N}$ – natūraliųjų skaičių aibė;
$\mathbb{Z}$ – sveikųjų skaičių aibė;
$\mathbb{Q}$ – racionaliųjų skaičių aibė;
$\mathbb{Q}_+$ – neneigiamų racionaliųjų skaičių aibė;
$\mathbb{Q}_+^*$ – teigiamų racionaliųjų skaičių aibė;
$\mathbb{R}$ – realiųjų skaičių aibė;
$\mathbb{R}_+$ – neneigiamų realiųjų skaičių aibė;
$\mathbb{R}_+^*$ – teigiamų realiųjų skaičių aibė;
$\mathbb{C}$ – kompleksinių skaičių aibė.

1. Skaičius $[a]$ žymi skaičiaus a sveikąją dalį, apibrėžiamą taip: skaičiaus a sveikoji dalis $[a]$ – tai didžiausias sveikas skaičius, neviršijantis skaičiaus a. Kitaip tariant,$[a]$ kaip sveiką skaičių galima apibrėžti šia sąlyga

$$[a] \leqslant a < [a] + 1.$$

2. $\sum_{j=1}^{n} a_j$ žymi sumą $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Po sumos ženklo $\sum$ nurodyta sumavimo indekso j įgyjamos sveikųjų skaičių reikšmės nuo 1 iki n. Sumuojamų elementų a_j indeksams j suteikiamos reikšmės nuo 1 iki n ir šie elementai susumuojami. Pavyzdžiui,

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. $\prod_{j=1}^{n} a_j$ žymi elementų a_j sandaugą $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. Pavyzdžiui,

$$\prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!.$$

Kombinatorika – plati matematikos sritis. Joje nagrinėjami uždaviniai labai įvairūs. Dažniausiai daugelis kombinatorikos uždavinių formuluojami gana paprastai, tuo tarpu jų sprendimas būna labai sudėtingas. Mus domins tik patys paprasčiausi kombinatorikos faktai, reikalingi kai kuriems tikimybių teorijos uždaviniams spręsti. Pradėsime nuo matematinės indukcijos metodo.

1.2 Matematinės indukcijos metodas

Tarkime, kad $A(n)$ žymi teiginį, priklausantį nuo natūraliojo skaičiaus n. Norėdami įsitikinti, ar šis teiginys teisingas kiekvienam natūraliajam skaičiui n, galime pasinaudoti matematinės indukcijos metodu. Matematinės indukcijos metodas susideda iš trijų dalių.

Pirmas žingsnis. Pirmiausia patikriname, ar teiginys teisingas skaičiui $n = 0$ ar $n = 1$ (arba kuriam nors konkrečiam skaičiui $n = n_0$, nes mažesniems natūraliems skaičiams teiginys $A(n)$ gali būti neapibrėžtas).

Antras žingsnis. Darome indukcinę prielaidą, kad teiginys $A(m)$ teisingas kiekvienam natūraliajam skaičiui $m < n$ (arba kiekvienam natūraliajam skaičiui m, tenkinančiam sąlygą $n_0 \leqslant m < n$).

Trečias žingsnis. Remdamiesi indukcine prielaida, įrodome, kad teisingas ir teiginys $A(n)$.

1.2.1 pavyzdys. Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad kiekvienam natūraliajam skaičiui n teisinga lygybė

$$A(n) : 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Šiuo atveju teiginio $A(n)$ vaidmenį atlieka lygybė

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Įrodymas. Abi lygybės pusės apibrėžtos kiekvienam natūraliajam skaičiui.

Pirmas žingsnis. Akivaizdu, kad ši lygybė teisinga, kai $n = 1$, nes šiuo atveju tiek kairioji lygybės pusė, tiek ir dešinioji lygybės pusė lygios 1.

Antras žingsnis. Darome indukcinę prielaidą, kad teiginys $A(m)$ teisingas kiekvienam natūraliajam skaičiui $m < n$.

Trečias žingsnis. Remdamiesi indukcine prielaida, įrodysime, kad teisingas ir teiginys $A(n)$. Tuo tikslu užrašykime teiginio $A(n)$ kairiąją lygybės pusę ir, remdamiesi indukcine prielaida, atlikime pertvarkymus:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2} + n^2 = \\
=&\frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)\big(2(n-1)+1\big)}{6} + n^2 = \\
=&\frac{(n-1)n(2n-1)+6n^2}{6} = n\frac{(n-1)(2n-1)+6n}{6} = \\
=&n\frac{n^2+3n+1}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

1.2.2 pavyzdys. Panašiai matematinės indukcijos metodu galima įrodyti teiginį: kiekvienam natūraliajam skaičiui n teisinga lygybė

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1.2.3 pavyzdys. Matematinės indukcijos metodu galima įrodyti Niutono binomo formulę, žinomą iš mokyklinės matematikos kurso,

$$(a+b)^n = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{C}_n^j \cdot a^j \cdot b^{n-j},$$

čia

$$\mathrm{C}_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}, \quad 0 \leqslant j \leqslant n,$$

– Niutono binomo koeficientai (priminsime, kad $0! = 1$). Matematinėje literatūroje Niutono binomo koeficientas C_n^j paprastai žymimas $\binom{n}{j}$.

1.2.4 pavyzdys (Niutono binomo formulės apibendrinimas). Matematinės indukcijos metodu galima įrodyti lygybę

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^N = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n \geqslant 0,\, j_1 + j_2 + \ldots + j_n = N} \binom{N}{\mathbf{j}} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n},$$

čia

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_n) \ \text{– multiindeksas},$$

$$\binom{N}{\mathbf{j}} = \frac{N!}{j_1! \ldots j_n!}.$$

1.3 Gretiniai, deriniai, kėliniai

1.3.1 Gretiniai be pasikartojimų

Aibės $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ elementus galime interpretuoti kaip abėcėlės raides. Sutarkime bet kurį r skirtingų raidžių užrašą pavadinti r ilgio žodžiu. Du žodžiai pagal apibrėžimą yra lygūs, jei jų užrašai paraidžiui sutampa. Pažymėkime A_n^r skirtingų r ilgio žodžių skaičių. Klausimas: kiek skirtingų r ilgio žodžių galima sudaryti? Atsakymas:

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

Iš tikrųjų, sudarant tokius žodžius, pirmąją raidę galite parinkti n būdų, antrąją, nepriklausomai nuo pirmos išrinktos raidės, galite parinkti $n-1$ būdų ir t. t., o r-tąją raidę, nepriklausomai nuo anksčiau išrinktų raidžių, galite parinkti $n-r+1$ būdų.

Pateiktas klausimas dažnai formuluojamas ir kitaip. Tarkime, kad jums iš n skirtingų objektų reikia išrinkti r objektų, atsižvelgiant į išrinkimo tvarką. Keliais būdais galite tai padaryti, jei r objektų rinkiniai sudaryti iš tų pačių objektų, bet išrinktų skirtinga tvarka, laikomi skirtingais? Toks elementų išrinkimas vadinamas *gretiniu.* Vadinasi, galime dar šitaip suformuluoti klausimą: kiek galima sudaryti gretinių be pasikartojimų iš n elementų po r elementų? Kaip žinome,

$$A_n^r = (n)_r = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

1.3.1 pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad gretinių be pasikartojimų iš n elementų po r elementų skaičių žymime tiek A_n^r, tiek ir $(n)_r$.

1.3.2 Gretiniai su pasikartojimais

Dabar panagrinėsime kitą atvejį. Galime sutarti, kad bet kuris abėcėlės r raidžių užrašas yra žodis, o du žodžiai sutampa tada ir tik tada, kai jų užrašai sutampa paraidžiui. Pavyzdžiui,

$$\underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{r}$$

yra žodis, sudarytas iš r raidžių. Klausimas: kiek yra skirtingų žodžių iš r raidžių, kurios žodyje gali ir pasikartoti? Atsakymas paprastas, tokių žodžių iš viso yra n^r. Gretinių kalba klausimas gali būti formuluojamas ir taip: kiek galima sudaryti gretinių su pasikartojimais iš n elementų po r elementų?

1.3.3 Deriniai be pasikartojimų

Keliais būdais iš aibės

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

galime išrinkti r elementų, kai išrenkamų elementų tvarka nesvarbi? Toks elementų rinkinys yra vadinamas *deriniu be pasikartojimo*. Šį klausimą galime ir taip suformuluoti: kiek aibėje A yra skirtingų poaibių, turinčių r elementų? Pažymėkime šį skaičių C_n^r. Jei atsižvelgtume į išrenkamų elementų tvarką, tai gretinių be pasikartojimų būtų

$$A_n^r = (n)_r = n(n-1)\ldots(n-r+1).$$

Kadangi išrinktų elementų tvarka nesvarbi, tai jų yra $r!$ kartų mažiau nei gretinių, t. y.

$$\mathrm{C}_n^r = \binom{n}{r} = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Skaičius C_n^r, kuris vadinamas *Niutono binomo koeficientu*, dažniausiai yra žymimas $\binom{n}{r}$, t. y. $\mathrm{C}_n^r = \binom{n}{r}$.

1.3.4 Deriniai su pasikartojimais

Dabar galime paklausti, o kiek yra derinių iš n elementų po r elementų su pasikartojimais? Užrašykime žodį iš r raidžių $a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_r}$, kuriame raidės gali ir pasikartoti ir, be to, raidžių tvarka nesvarbi. Tegul x_j lygus raidės a_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, užrašytame žodyje, skaičiui. Tuomet užrašytam žodžiui galime priskirti lygties

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

sprendinį

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

sveikais neneigiamais skaičiais. Ir atvirkščiai: kiekvienam užrašytos lygties sprendiniui $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sveikais neneigiamais skaičiais galime priskirti žodį iš r raidžių, kuriame raidžių tvarka nesvarbi.

Norint atsakyti į suformuluotą klausimą, kiek yra derinių su pasikartojimais iš n elementų po r elementų, reikia išsiaiškinti, kiek užrašytoji lygtis turi sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais.

Pateiksime keletą šio klausimo sprendimų.

1.3.2 teiginys. Lygties

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

sprendinių skaičius sveikais neneigiamais skaičiais lygus

$$\mathrm{C}_{n+r-1}^{r} = \mathrm{C}_{n+r-1}^{n-1} =$$
$$= \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}.$$

Tuo tarpu sprendinių skaičius sveikais teigiamais skaičiais lygus

$$\mathrm{C}_{r-1}^{n-1} = \binom{r-1}{n-1}.$$

Pirmas įrodymas. Tarp $n+1$ brūkšnelių $|$, surašytų į eilutę, yra n tarpų:

$$\underbrace{|\ \ |\ \ |\ \ \ldots\ \ |\ \ |}_{n+1}.$$

Į šiuos tarpus reikia išdėlioti r rutuliukų $\bullet$. Bet kaip išdėlioję rutuliukus į tarpus tarp brūkšnelių, gauname $n+r-1$ simbolių, sudarytų iš r rutuliukų ir $n-1$ brūkšnelių. Bet kuris šių simbolių išdėstymas tarp išorinių brūkšnelių atitinka lygties

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

sprendinį sveikais neneigiamais skaičiais ir atvirkščiai. Akivaizdu, kad r rutuliukų padėtį tarp $n+r-1$ simbolių galima keisti

$$\mathrm{C}_{n+r-1}^{r} = \mathrm{C}_{n+r-1}^{n-1} =$$
$$= \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$$

būdų.

Be to, lengva suvokti, kiek lygtis turi sprendinių $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kurių komponentės griežtai teigiamos. Kiekvieną tokį sprendinį atitinka rutuliukų ir brūkšnelių toks išdėstymas, kad tarp rutuliukų būtinai turi būti tik vienas brūkšnelis. Tarp rutuliukų yra $r-1$ tarpų, o vidinių brūkšnelių yra $n-1$. Tuos brūkšnelius į rutuliukų tarpus galima išdėlioti

$$\mathrm{C}_{r-1}^{n-1} = \binom{r-1}{n-1}$$

būdų.

Antras įrodymas. Iš lygties

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

sprendinio $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sveikais neneigiamais skaičiais sudarykime didėjančią n skaičių seką:

$$\begin{aligned} x_1 < x_1 + x_2 + 1 < \ldots < \\ &< x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + n - 3 < \\ &< x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + n - 2 < \\ &< x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n - 1 = \\ &= r + n - 1. \end{aligned}$$

Ir atvirkščiai, turėdami tokią didėjančią n skaičių seką, kurios paskutinis skaičius yra lygus $r+n-1$, lengvai galime atstatyti lygties sprendinį.

Dabar matome, kad užrašyta lygtis turi tiek sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais, kiek ir yra būdų iš skaičių $0, 1, \ldots, n+r-2$ išrinkti $n-1$ skaičių, kai išrinktų skaičių tvarka nesvarbi. Vadinasi, užrašyta lygtis turi $\binom{n+r-1}{n-1}$ sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais.

Norėdami išsiaiškinti, kiek lygtis

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

turi sprendinių $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kurių komponentės griežtai teigiamos, nagrinėkime lygtį

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = r - n,\ n \leqslant r.$$

Šios lygties sprendinį $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sveikais neneigiamais skaičiais atitinka ankstesnės lygties sprendinys $(y_1+1, y_2+1, \ldots, y_n+1)$, kurio komponentės griežtai teigiamos (ir atvirkščiai). Vadinasi, ankstesnė lygtis tokių sprendinių turi $\binom{r-1}{n-1}$.

Trečias įrodymas. Pirmiausia apibrėžkime skaičius $y_j = x_j + 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Pastebėsime, jei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra lygties

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

sprendinys sveikais neneigiamais skaičiais, tai $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ yra lygties

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = n + r$$

sprendinys sveikais skaičiais $y_j \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Matome, kad lygtis $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ turi tiek pat sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais, kiek ir lygtis $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = n + r$ turi sprendinių $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sveikais skaičiais $y_j \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Dabar išsiaiškinsime, kiek pastaroji lygtis turi nurodytų sprendinių. Tuo tikslu įsivaizduokime, kad $n+r$ rutuliukų išdėstome į eilutę. $n+r$ rutuliukų eilutėje

$$\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet\bullet}_{n+r}$$

tarp šių rutuliukų yra $n+r-1$ tarpų. Į tuos tarpus galima išdėstyti $n-1$ brūkšnelių $\binom{n+r-1}{n-1}$ būdais. Kiekvienam brūkšnelių išdėstymui atitinka lygties $y_1+y_2+\ldots+y_n=n+r$ sprendinys $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ sveikais skaičiais $y_j \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$. y_1 yra lygus rutuliukų skaičiui iki pirmojo brūkšnelio, y_j yra lygus rutuliukų skaičiui tarp $j-1$ -ojo ir j -ojo brūkšnelių, $2 \leqslant j \leqslant n-1$, o y_n yra lygus rutuliukų skaičiui po paskutiniojo brūkšnelio.

Ketvirtas įrodymas. Pažymėkime $N(n,r)$ lygties

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=r$$

sprendinių skaičių sveikais neneigiamais skaičiais. Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad

$$N(n,r)=\binom{n+r-1}{n-1}.$$

Indukciją atliksime pagal skaičių n. Pirmiausia teiginys teisingas, jei $n=1$. Darome indukcinę prielaidą, kad visiems $m<n$ teisinga lygybė $N(m,r)=\binom{m+r-1}{m-1}$. Iš lygties

$$x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}=r-x_n, \quad \text{čia } 0 \leqslant x_n \leqslant r,$$

matome, kad

$$N(n,r)=N(n-1,0)+N(n-1,1)+\ldots+N(n-1,r)= \\ =\sum_{j=0}^{r}\binom{n+j-2}{n-2}.$$

Vadinasi, reikia įrodyti lygybę

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{n+j-2}{n-2}=\binom{n+r-1}{n-1}.$$

Šią lygybę įrodysime matematinės indukcijos metodu. Indukciją atliksime pagal skaičių r. Kai $r=0$, tiek kairioji, tiek ir dešinioji pusės

yra lygios 1. Darome indukcinę prielaidą, kad visiems $s < r$ teisinga lygybė
$$\sum_{j=0}^{s} \binom{n+j-2}{n-2} = \binom{n+s-1}{n-1}.$$

Pasinaudoję indukcine prielaida, galime užrašyti
$$\sum_{j=0}^{r} \binom{n+j-2}{n-2} = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{n+j-2}{n-2} + \binom{n+r-2}{n-2} =$$
$$= \binom{n+r-2}{n-1} + \binom{n+r-2}{n-2} = \binom{n+r-1}{n-1}.$$

1.3.5 Kėliniai be pasikartojimų ir su pasikartojimais

n elementų perstatinys yra vadinamas *kėliniu*. Jei visi elementai skirtingi, tai galima sudaryti $n!$ kėlinių. Tai gretinių be pasikartojimų iš n elementų po n elementų skaičius $(n)_n = n!$. Tarkime, kad turime elementų
$$\{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n_1}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{n_2}, \ldots, \underbrace{a_s, a_s, \ldots, a_s}_{n_s}\}$$
šeimą. Kiek šiuo atveju galima sudaryti kėlinių?

Tegul
$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s.$$

Jei duotų elementų šeimos kėlinyje (perstatinyje) $a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n}$ bet kaip perstatysime tarpusavyje tik elementus a_1 arba tik elementus a_2 ir taip toliau, tai kėlinys $a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n}$ nuo tokių elementų perstatymo nepasikeičia. Vadinasi, iš viso šiuo atveju galime sudaryti
$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_s!}$$
skirtingų kėlinių su pasikartojimais.

1.4 Kombinatorikos uždavinių pavyzdžiai

1.4.1 pavyzdys. Tarkime turime r rutulių ir n dėžių. Keliais būdais rutulius galima išdėlioti į dėžes taip, kad nė viena dėžė neliktų tuščia? Šį skaičių pažymėkime $N(r, n)$.

Akivaizdu, kad kiekvienam $r \geqslant 1$, $N(r, 1) = 1$. Pastebėsime, kad $N(n, n) = n!$ ir $N(r, n) = 0$, jei $r < n$. Todėl sutarkime, kad turime $r+n$ rutulių ir n dėžių. Rutulius galime pradėti dėlioti į pirmąją dėžę įdėję bet kurį vieną rutulį, o likusius išdėlioti į likusias $n-1$ dėžes visais galimais būdais taip, kad nė viena dėžė neliktų tuščia, arba į pirmą dėžę įdėję bet kuriuos du rutulius, o likusius išdėlioti į likusias $n-1$ dėžes visais galimais būdais taip, kad nė viena dėžė neliktų tuščia ir t. t. Kitaip tariant, galime užrašyti rekurentinę formulę

$$
\begin{aligned}
N(n+r, n) &= \sum_{j=1}^{r+1} \binom{n+r}{j} N(n+r-j, n-1) = \\
&= \sum_{j=1}^{n+r} \binom{n+r}{j} N(n+r-j, n-1).
\end{aligned}
$$

1.4.2 pastaba. Bendroji skaičiaus $N(n+r,\, n)$ išraiška yra

$$
N(n+r,\, n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^{n+r}.
$$

Žinodami pradines sąlygas, kad $N(n,\, n) = n!$ ir $N(r,\, n) = 0$, jei $r < n$, ir, pasinaudoję rekurentine formule, galima pabandyti rasti skaičiaus $N(n+r,\, n)$ paprastesnę išraišką nei bendra. Dabar tai ir pabandysime padaryti atskirais atvejais.

1. Užrašykime rekurentinę formulę atskiru atveju

$$\begin{aligned}
&N(n+1,\, n) = \\
&= (n+1)N(n,\, n-1) + \binom{n+1}{2}N(n-1,\, n-1) = \\
&= (n+1)N(n,\, n-1) + \binom{n+1}{2}(n-1)! = \\
&= (n+1)N(n,\, n-1) + \frac{1}{2}(n+1)!
\end{aligned}$$

Paprastumo dėlei pažymėję $A(n) = N(n,\, n-1)$, gautą formulę galime perrašyti taip:

$$A(n+1) = (n+1)A(n) + \frac{1}{2}(n+1)!.$$

Pasinaudoję šia formule, užrašykime lygybes

$$\begin{array}{ccccc}
A(n+1) & = & (n+1)A(n) & + & \frac{1}{2}(n+1)! \\
(n+1)_1 A(n) & = & (n+1)_2 A(n-1) & + & \frac{1}{2}(n+1)! \\
\cdots & & \cdots & & \cdots \\
(n+1)_{n-2} A(3) & = & (n+1)_{n-1} A(2) & + & \frac{1}{2}(n+1)!.
\end{array}$$

Sudėję šias lygybes, gauname

$$A(n+1) = \frac{(n+1)!}{2} + \frac{(n-1)(n+1)!}{2} = \frac{n(n+1)!}{2},$$

t. y. $N(n+1,\, n) = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

Panašiai galima įrodyti, kad

$$N(n+2,\, n) = \frac{n(3n+1)(n+2)!}{24}, \tag{1}$$

$$N(n+3,\, n) = \frac{n^2(n+1)(n+3)!}{48}, \tag{2}$$

$$N(n+4,\, n) = \frac{n(15n^3+30n^2+5n-2)(n+4)!}{5760}. \tag{3}$$

Įrodysime (1), (2), (3) lygybes.

2. Pažymėję $B(n+2) = N(n+2,\, n)$, užrašome rekurentinę formulę

$$B(n+2) = (n+2)B(n+1) + \binom{n+2}{2}A(n) + \\ + \binom{n+2}{3}N(n-1,\, n-1).$$

Įrašę $A(n)$ ir $N(n-1,\, n-1)$ reikšmes, gauname

$$B(n+2) = (n+2)B(n+1) + \frac{(n-1)(n+2)!}{4} + \frac{(n+2)!}{6} = \\ = (n+2)B(n+1) + \frac{(3n-1)(n+2)!}{12}.$$

Užrašykime lygybes

$$\begin{array}{ccccc} B(n+2) & = & (n+2)B(n+1) & + & \frac{(3n-1)(n+2)!}{12} \\ (n+2)_1 B(n+1) & = & (n+2)_2 B(n) & + & \frac{(3n-4)(n+2)!}{12} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ (n+2)_{n-2} B(4) & = & (n+2)_{n-1} B(3) & + & \frac{5(n+2)!}{12}. \end{array}$$

Sudėję šias lygybes ir atlikę veiksmus, gauname

$$N(n+2,\, n) = B(n+2) = \frac{n(3n+1)(n+2)!}{24}.$$

3. Pažymėję $C(n+3) = N(n+3,\, n)$, užrašome rekurentinę formulę

$$C(n+3) = (n+3)C(n+2) + \binom{n+3}{2}B(n+1) + \\ + \binom{n+3}{3}A(n) + \binom{n+3}{4}N(n-1,\, n-1).$$

Šią formulę sutvarkę, gauname

$$C(n+3) = (n+3)C(n+2) + \frac{(3n^2-n)(n+3)!}{48}.$$

Dabar galime užrašyti lygybes

$$\begin{aligned} C(n+3) &= (n+3)C(n+2) + \tfrac{(3n^2-n)(n+3)!}{48}, \\ (n+3)_1 C(n+2) &= (n+3)_2 C(n+1) + \tfrac{(3(n-1)^2-(n-1))(n+3)!}{48}, \\ &\cdots, \\ (n+3)_{n-2} C(5) &= (n+3)_{n-1} C(4) + \tfrac{(3\cdot 2^2-2)(n+3)!}{48}. \end{aligned}$$

Sudėję šias lygybes ir atlikę veiksmus, gauname

$$N(n+3,\, n) = C(n+3) = \frac{n^2(n+1)(n+3)!}{48}.$$

4. Pažymėję $D(n+4) = N(n+4,\, n)$, užrašome rekurentinę formulę

$$D(n+4) = (n+4)D(n+3) + \binom{n+4}{2} C(n+2) +$$

$$+\binom{n+4}{3} B(n+1) + \binom{n+4}{4} A(n) + \binom{n+4}{5} N(n-1,\, n-1).$$

Šią formulę sutvarkę, gauname

$$D(n+4) = (n+4)D(n+3) + \frac{(15n^3-5n+2)(n+4)!}{1440}.$$

Dabar galime užrašyti lygybes

$$\begin{aligned} D(n+4) &= (n+4)D(n+3) + \\ &+ \frac{(15n^3-5n+2)(n+4)!}{1440}, \\ (n+4)_1 D(n+3) &= (n+4)_2 D(n+2) + \\ &+ \frac{(15(n-1)^3-5(n-1)+2)(n+4)!}{1440}, \\ &\cdots, \\ (n+4)_{n-2} D(6) &= (n+4)_{n-1} D(5) + \\ &+ \frac{(15\cdot 2^3 - 5\cdot 2 + 2)(n+4)!}{1440}. \end{aligned}$$

Sudėję šias lygybes ir atlikę veiksmus, gauname

$$N(n+4,\,n) = D(n+4) = \frac{n(15n^3+30n^2+5n-2)(n+4)!}{5760}.$$

1.4.3 pastaba. Lygybę $N(n+1,\,n) = \dfrac{n(n+1)!}{2}$ galima įrodyti tiesiogiai, tačiau (1) lygybę tiesiogiai įrodyti būtų nelengva. Lygybes (2) ir (3) vargu ar galima tiesiogiai įrodyti. Įdomu, ar paprasta būtų įrodyti lygybę

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^{n+4} = \frac{n(15n^3+30n^2+5n-2)(n+4)!}{5760}\ ?$$

1.4.4 pavyzdys. Sakykime, kad knygų lentynoje yra n knygų. Keliais būdais galima parinkti m knygų, nesančių viena šalia kitos?

Sprendimas. Šį klausimą galima suformuluoti kitaip. Keliais būdais $n-m$ knygų (vaizduojamų brūkšneliais) galima sudėlioti tarp m knygų, pavaizduotų rutuliukais

$$\underbrace{\bullet\ \ \bullet\ \ \ldots\ \ \bullet}_{m},$$

taip, kad jokia knyga iš m knygų nebūtų viena šalia kitos. Bet knygas (brūkšnelius) galima dėlioti ne vien tik į m knygų tarpus (tarp rutuliukų), bet dėti tiek iš vienos, tiek iš kitos arba iš abiejų pusių rutuliukų.

Taigi galimi tokie atvejai:

$$\underbrace{\bullet\,|\ldots|\bullet\ \cdots\bullet\ |\ldots|\,\bullet}_{m \text{ rutuliukų, } n-m \text{ brūkšnelių}},$$

$$\underbrace{|\ldots|\ \bullet\ |\ldots|\bullet\ \cdots\bullet\ |\ldots|\,\bullet}_{m \text{ rutuliukų, } n-m \text{ brūkšnelių}},$$

$$\underbrace{\bullet\,|\ldots|\bullet\ldots\ \bullet|\ldots|\ \bullet\ |\ldots|}_{m \text{ rutuliukų, } n-m \text{ brūkšnelių}},$$

$$\underbrace{|\ldots| \bullet |\ldots| \bullet \cdots \bullet |\ldots| \bullet |\ldots|}_{m \text{ rutuliukų, } n-m \text{ brūkšnelių}}.$$

Pirmuoju atveju akivaizdu, kad $n-m$ knygų (brūkšnelių) išdėliojimų į knygų (rutuliukų) tarpus yra tiek, kiek lygtis

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = n - m$$

turi sprendinių teigiamais sveikais skaičiais. Ši lygtis tokių sprendinių turi $\binom{n-m-1}{m-2}$. Antruoju ir trečiuoju atvejais – tiek, kiek lygtis

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n - m$$

turi sprendinių teigiamais sveikais skaičiais. Ši lygtis tokių sprendinių turi $\binom{n-m-1}{m-1}$. Paskutiniuoju atveju – tiek, kiek lygtis

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+1} = n - m$$

turi sprendinių teigiamais sveikais skaičiais. Ši lygtis tokių sprendinių turi $\binom{n-m-1}{m}$.

Galutinis atsakymas yra

$$\binom{n-m-1}{m-2} + 2\binom{n-m-1}{m-1} + \binom{n-m-1}{m} = \binom{n-m+1}{m}.$$

Pastarąjį pavyzdį galima ir kitaip išspręsti. Pateiksime kitą uždavinio sprendimą.

Dar vienas sprendimas. Parenkamas knygas sunumeruokime skaičiais nuo 1 iki m. Tegul x_j knygų, esančių tarp parenkamų $j-1$ ir j knygų, skaičius, $2 \leqslant j \leqslant m$. Tegul x_1 – knygų, esančių nuo kairiojo lentynos krašto iki pirmos parenkamos knygos, skaičius, x_{m+1} – knygų, esančių nuo paskutinės parenkamos knygos iki dešiniojo lentynos krašto, skaičius. Tuomet ieškomas skaičius yra lygus lygties

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m+1} = n - m$$

sprendinių sveikais skaičiais, tenkinančių sąlygas

$$x_1,\ x_{m+1} \geqslant 0,\ x_j > 0,\ 2 \leqslant j \leqslant m,$$

skaičiui. Šią lygtį pertvarkykime taip:

$$(x_1 + 1) + x_2 + \ldots + (x_{m+1} + 1) = n - m + 2.$$

Tegul

$$y_1 = x_1 + 1,\ y_{m+1} = x_{m+1} + 1,\ y_j = x_j,\ 2 \leqslant j \leqslant m.$$

Tuomet ieškomas skaičius yra lygus lygties

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{m+1} = n - m + 2$$

sprendinių sveikais teigiamais skaičiais skaičiui. Kaip žinome, šiuo atveju, sprendinių skaičius yra lygus

$$\mathrm{C}_{n-m+1}^{m} = \binom{n-m+1}{m}.$$

2 Įvadas. Įvykiai, veiksmai su įvykiais

Klasikinės mechanikos teorija pagrįsta Niutono dėsniais. Ši teorija nagrinėja makropasaulio kūnų sąveikas ir jų poveikyje kūnų judėjimo dėsnius. Masyvus kūnas įsivaizduojamas kaip masyvus taškas (kūno masės centras) ir nagrinėjamas jo judėjimas. Masyvaus taško judėjimas aprašomas antros eilės diferencialinėmis lygtimis. Kūno (iš tikrųjų masės centro) judėjimo trajektorija, t. y. diferencialinės lygties sprendinys, lemiantis kūno padėtį bet kuriuo laiko momentu $t \geqslant 0$, vienareikšmiškai priklauso nuo jo padėties ir greičio (tiksliau – impulso) pradiniu momentu $t = 0$.

Klasikinė mechanika labai gerai paaiškina daugelį makropasaulio reiškinių. Bet egzistuoja mikropasaulis, kurio veikėjai yra elektronai, pozitronai, daugybė mezonų, barionų ir kitokių elementariųjų dalelių. Jų elgesys visiškai nepanašus į makropasaulio kūnų elgesį. Iš neapibrėžtumo principo, kurį atskleidė Heizenbergas, daroma išvada, kad iš esmės nebegalima nustatyti elementariosios dalelės padėties ir impulso tuo pačiu laiko momentu. Mikropasaulio dalelių evoliucijos laike nebegalima aprašyti antros eilės diferencialinėmis lygtimis. Heizenbergas, Šriodingeris ir Dirakas sukūrė kvantinę mechaniką, pritaikytą mikropasauliui tirti. Kvantinė mechanika iš pagrindų skiriasi nuo klasikinės mechanikos. Dalelės tikslios padėties erdvėje nustatyti negalima, bet, žinant jos banginę arba būsenos funkciją (dar vadinama stebimąja), galima spręsti apie dalelės padėtį erdvėje tikimybiškai. Pasitelkiant dalelės banginę funkciją, galima apskaičiuoti tikimybę dalelę aptikti kurioje nors erdvės srityje. Tuo tarpu dalelės banginės funkcijos evoliuciją laike aprašo Heizenbergo lygtis Heizenbergo evoliucijos paveiksle arba Šriodingerio lygtis Šriodingerio evoliucijos paveiksle.

Be to, yra žinoma, kad net visiškai determinuotuose procesuose, aprašomuose Hamiltono lygtimis, aptinkamas vadinamasis determinuotas chaosas. Tie reiškiniai yra susieję su netiesiškumu. Kiekviena trajektorija vienareikšmiškai aprašoma pradinių sąlygų laiko momentu $t = 0$. Galima stebėti trajektorijų, kurių pradinės sąlygos artimos, koordinates laiko momentu $t = t_0$, kai t_0 pakankamai didelis. Čia ir galima stebėti trajektorijų koordinačių chaotišką išsibarstymą. Šis reiškinys ir yra vadinamas determinuotu chaosu. Šį reiškinį dar XIX - XX amžių sandūroje atskleidė Puankare (H. Poincarè, 1892), bet niekas tuo metu šio reiškinio derimai neįvertino. Po maždaug 70 metų metereologas Lorencas (E. H. Lorenz, 1963) užrašė pirmos eilės tris susiejusias netiesines diferencialines lygtis, kurių trajektorijos „elgiasi“ chaotiškai. Tokia sudėtinga realybė.

O štai paprastas pavyzdys, kai, atlikdami bandymą, negalime vienareikšmiškai numatyti jo rezultatų. Kas nėra jaunystėje žaidęs žaidimų, kai mėtomas kubelio formos kauliukas. Jo šešiose sienelėse pažymėtos akutės. Kai žaidėjas gauna galimybę mesti kauliuką, jo sėkmė tuo žaidimo momentu priklauso nuo atsivertusių akučių skaičiaus. Kadangi kauliukas kubelio formos, t. y. simetriškas, kiekvienas intuityviai jaučia, kad atsiversti vienam ar kitam akučių skaičiui yra vienodos galimybės, bet niekas negali tiksliai pasakyti, koks kiekvieną sykį akučių skaičius atsivers, nebent pasiseka kartais atspėti. Kiekvienas paklaustas, kokia galimybė, metant kauliuką, atsiversti, pavyzdžiui, penkių akučių skaičiui, atsakytų: viena iš šešių. Tai yra geriausias atsakymas.

2.1 Elementariųjų įvykių erdvės

Kalbant apie mėtomo kauliuko atsivertusių akučių skaičius, galima padaryti keletą paprastų pastabų. Pirma, visuomet atsiverčia kuris nors akučių skaičius. Antra, nors kauliukas turi briaunas, kampus, niekas nesuabejoja, kad išmestas kauliukas, nukritęs ant kieto horizontalaus paviršiaus, gulės ant sienelės, o ne briauna ar kampu. Tokios kauliuko padėtys ant kieto horizontalaus paviršiaus nestabilios ir todėl neįmanomos. Mėtant kauliuką į klampų skystį, pavyzdžiui, į labai tirštą medų, kauliukas gali įsmigti į medų net kampu ar briauna. Mūsų tokios situacijos nedomins.

Tegul E_j, $1 \leqslant j \leqslant 6$, yra įvykis, kad, išmestam į viršų kauliukui nukritus ant kieto horizontalaus paviršiaus, atsiverčia j akučių. Išmestam į viršų kauliukui nukritus, visuomet būtinai įvyksta tik kuris nors vienas iš įvykių E_j, $1 \leqslant j \leqslant 6$. Šiuos įvykius galime pavadinti elementariaisiais, nes jie neskaidomi, nėra sudaryti iš dar paprastesnių įvykių. Tuo tarpu galime nagrinėti, pavyzdžiui, įvykį A: išmetus kauliuką, atsivers lyginis akučių skaičius. Įvykis A sudarytas iš elementarių įvykių E_2, E_4, E_6. Šį faktą galima užrašyti formaliai

$$A = E_2 + E_4 + E_6$$

arba

$$A = E_2 \cup E_4 \cup E_6.$$

Galima nagrinėti ir kitus įvykius. Iš šešių elementariųjų įvykių galima sudaryti iš viso 64 įvykius.

Daugelis procesų, reiškinių tiriami atliekant bandymus ir nagrinėjant atliekamų bandymų rezultatus. Dažniausiai bandymo rezultatai nebūna vienareikšmiški. Kiekvienas bandymas gali baigtis viena ar kita išdava, įvykiu. Todėl svarbu sukurti reiškinio matematinį modelį ir nurodyti bandymų elementariųjų įvykių erdvę taip, kad bet kuris bandymas baigtųsi vienu ar kitu elementariuoju įvykiu ir numatyti įvykio pasirodymo tikėtinumą. Paprastai tariant, bandymų rezultatų prognozei reikia parinkti elementariųjų įvykių erdvę, atspindinčią tyrimų esmę, ir nurodyti tų elementariųjų įvykių pasirodymų tikimybes. Žinant tai, galima apskaičiuoti ir sudėtinių įvykių tikimybes (nors tai padaryti bendru atveju gali būti ne taip paprasta).

Pradėsime elementariųjų įvykių erdvės samprata.

2.1.1 apibrėžimas (Elementariųjų įvykių erdvė). Abstrakti aibė Ω yra vadinama *elementariųjų įvykių erdve*, o šios aibės elementai – *elementariaisiais įvykiais.*

Kaip matome, elementariųjų įvykių erdvės sąvoka pirminė. Elementariųjų įvykių erdvė Ω gali būti tiek baigtinė, tiek ir begalinė. Abstrakti aibė Ω gali būti kurio nors reiškinio tyrimo bandymais išeičių elementariųjų įvykių erdve, o jos elementai – elementariaisiais įvykiais. Viena iš esminių reikalaujamų elementariųjų įvykių savybių yra ta, kaip anksčiau minėjome, kad kiekvieno bandymo metu gali įvykti tik vienas iš elementariųjų įvykių.

2.1.2 pavyzdys. Tegul du žaidėjai a ir b žaidžia šachmatais. Sutarta, kad kiekviena šachmatų partija baigiasi tik vieno ar kito žaidėjo laimėjimu ir žaidimas baigsis, jei vienas žaidėjų laimės dvi partijas vieną po kitos. Kaip šios situacijos atveju nurodyti elementariųjų įvykių erdvę? Sutarkime raide a žymėti žaidėjo a laimėtą partiją, o raide b – žaidėjo b laimėtą partiją. Tuomet elementariuosius įvykius galime pavaizduoti taip:

$$aa, bb, abb, baa, ababb, babaa \text{ ir taip toliau},$$

be to, dar būtina priskirti tuos atvejus, kai žaidimas po baigtinio šachmatų partijų skaičiaus nesibaigia, t. y. žaidimas tęsiasi be galo. Tie atvejai atrodo taip:

$$ababab\ldots \text{ arba } bababa\ldots .$$

Vadinasi, šiuo atveju elementariųjų įvykių erdvė yra

$$\Omega = \{ababab, \ldots,\ \ bababa, \ldots,\ aa, bb, abb, baa, ababb, babaa, \ldots\}.$$

2.2 Diskrečiosios atsitiktinių įvykių erdvės

Artimiausias tikslas – apibrėžti diskrečiąsias atsitiktinių įvykių erdves. Tam tikslui reikalinga skaičios aibės sąvoka.

2.2.1 apibrėžimas. Begalinė aibė yra vadinama *skaičia*, jei jos elementus galima sunumeruoti natūraliaisiais skaičiais.

2.2.2 pavyzdys. Skaičios aibės X begalinis poaibis yra skaiti aibė.

2.2.3 pavyzdys. Natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N}$ yra skaiti.

2.2.4 pavyzdys. Lyginių (nelyginių) natūraliųjų skaičių aibė yra skaiti.

2.2.5 pavyzdys. Sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ yra skaiti.

2.2.6 pavyzdys. Lyginių (nelyginių) sveikųjų skaičių aibė yra skaiti.

2.2.7 pavyzdys. Racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra skaiti.

2.2.8 pavyzdys. Realiųjų skaičių aibė $\mathbb{R}$ nėra skaiti. Realiųjų skaičių sunumeruoti natūraliaisiais skaičiais neįmanoma. Realiųjų skaičių intervalai (a, b), $a < b$, taip pat nėra skaičios aibės. Šios aibės yra vadinamos *kontinuumo galios aibėmis*.

2.2.9 apibrėžimas. Elementariųjų įvykių erdvės Ω visų poaibių aibė $\mathcal{F}(\Omega)$, kai Ω yra baigtinė arba skaiti aibė, yra vadinama *diskrečia atsitiktinių įvykių erdve.* Aibės $\mathcal{F}(\Omega)$ elementai (t. y. aibės Ω poaibiai) yra vadinami atsitiktiniais įvykiais (paprastumo dėlei dažniausiai juos vadinsime tiesiog įvykiais). Jei aibė Ω baigtinė, tai aibė $\mathcal{F}(\Omega)$ sudaryta iš $2^{|\Omega|}$ elementų, čia $|\Omega|$ yra elementų skaičių aibėje Ω.

2.3 Veiksmai su įvykiais

Apibrėžti veiksmus su įvykiais galima tikimybių teorijos terminais ir aibių teorijos terminais. Aptarsime veiksmus su atsitiktiniais įvykiais ir jų interpretacijas tiek tikimybių teorijos, tiek ir aibių teorijos terminais.

Tegul Ω ir $\mathcal{F}(\Omega)$ – elementariųjų ir atsitiktinių įvykių erdvės. Apibrėždami atsitiktinius įvykius naudojomės aibių teorijos terminais.

2.3.1 apibrėžimas (Įvykio poįvykis). Sakoma, kad atsitiktinis įvykis $A \in \mathcal{F}(\Omega)$, sudarytas iš elementarių įvykių $\omega_j \in \Omega,\ j \in I$, čia I – indeksų aibė, bandymo metu įvyko, jei įvyko kuris nors elementarusis įvykis $\omega_j, j \in I$. Įvykis A yra vadinamas *įvykio B poįvykiu*, jei, bandymo metu įvykus įvykiui A, įvyksta ir įvykis B. Tai užrašoma $A \subset B$. Šis užrašas rodo šių įvykių ir kaip aibių sąryšį: kiekvienas elementarusis įvykis, priklausantis įvykiui A, priklauso ir įvykiui B.

2.3.2 apibrėžimas (Būtinasis ir negalimas įvykiai). Kadangi aibė Ω sudaryta iš visų elementariųjų įvykių, tai Ω, kaip atsitiktinis įvykis, kiekvieno bandymo metu įvyksta, nes kiekvieno bandymo metu įvyksta kuris nors elementarusis įvykis. Įvykis Ω yra vadinamas *būtinuoju įvykiu.* Tuo tarpu aibės Ω tuščiasis poaibis $\emptyset$ (t. y. aibės $\mathcal{F}(\Omega)$ elementas), kuriam nepriklauso nė vienas elementarusis įvykis, yra vadinamas *negalimu.*

2.3.3 apibrėžimas (Priešingi įvykiai). Tikimybių teorijos terminais apibrėžiamas atsitiktinis įvykis $\overline{A}$, vadinamas *priešingu atsitiktiniam įvykiui A*, jei kiekvieno bandymo metu atsitiktinis įvykis $\overline{A}$ įvyksta tada ir tik tada, kai atsitiktinis įvykis A neįvyksta. Aibių teorijos terminais $\overline{A} = \Omega \setminus A$, t. y. aibė $\overline{A}$ yra aibės A papildinys iki aibės Ω.

2.3.4 apibrėžimas (**Atsitiktinių įvykių suma**). Atsitiktinių įvykių A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ suma vadinamas atsitiktinis įvykis $\cup_{j=1}^{n} A_j$, kuris laikomas įvykusiu, jei įvyksta bent vienas iš atsitiktinių įvykių A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Atsitiktinių įvykių A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ suma yra žymima ir $\sum_{j=1}^{n} A_j$.

Pavyzdžiui, atsitiktinio įvykio A ir jam priešingo atsitiktinio įvykio $\overline{A}$ suma $A \cup \overline{A}$, arba kitaip žymima $A + \overline{A}$, yra būtinasis įvykis Ω.

2.3.5 apibrėžimas (**Atsitiktinių įvykių sandauga**). Atsitiktinių įvykių A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ sandauga vadinamas atsitiktinis įvykis $\cap_{j=1}^{n} A_j$, kuris laikomas įvykusiu tada ir tik tada, jei įvyksta visi atsitiktiniai įvykiai A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Atsitiktinių įvykių A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ sandauga yra žymima ir $\prod_{j=1}^{n} A_j$. Pavyzdžiui, atsitiktinio įvykio A ir jam priešingo atsitiktinio įvykio $\overline{A}$ sandauga $A \cap \overline{A}$, arba kitaip žymima $A \cdot \overline{A}$, yra tuščiasis įvykis $\emptyset$.

2.3.6 apibrėžimas (**Nesuderinami įvykiai**). Įvykiai A ir B yra vadinami *nesuderinamais*, jei šie įvykiai kiekvieno bandymo metu negali įvykti kartu, t. y. įvykis $A \cdot B = \emptyset$. Aibių teorijos terminais įvykiai A ir B yra nesuderinami tada ir tik tada, kai $A \cap B = \emptyset$.

2.3.7 apibrėžimas (**Įvykių skirtumas**). Įvykių A ir B skirtumu yra vadinamas įvykis, žymimas $A \setminus B$, sudarytas iš elementariųjų įvykių, priklausančių A, bet nepriklausančių B. Tikimybių teorijos terminais $A \setminus B$ apibrėžiamas, kaip įvykis, kuris įvyksta, kai įvyksta įvykis A, bet neįvyksta įvykis B.

2.4 Įvykių veiksmų savybės

Dabar surinksime visus apibrėžimus į vieną vietą.

Tegul Ω – baigtinė arba skaiti elementariųjų įvykių erdvė, $F(\Omega)$ – įvykių aibė. Įvykių aibėje apibrėžėme veiksmus: įvykių sudėtį, žymimą $\cup$ arba $+$, įvykių daugybą, žymimą $\cap$ arba $\cdot$, įvykių atimtį, žymimą $\setminus$, bei įvykio papildinio veiksmą$^{-}$: kiekvienam įvykiui A priskyrėme priešingą įvykį $\overline{A}$. Pastaroji operacija yra atskiras atvejis įvykių atimties:

$\overline{A} = \Omega \setminus A$. Be to, apibrėžti veiksmai pasižymi žemiau išrašytomis savybėmis.

Įvykių (aibių) sudėties savybės:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, čia $A,\ B,\ C \in \mathcal{F}(\Omega)$;
- $A \cup B = B \cup A$, čia $A,\ B \in \mathcal{F}(\Omega)$;
- jei $A \subset B$, tai $A \cup B = B$, čia $A,\ B \in \mathcal{F}(\Omega)$.

Įvykių (aibių) daugybos savybės:

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, čia $A,\ B,\ C \in \mathcal{F}(\Omega)$;
- $A \cap B = B \cap A$, čia $A,\ B \in \mathcal{F}(\Omega)$;
- jei $A \subset B$, tai $A \cap B = A$, čia $A,\ B \in \mathcal{F}(\Omega)$.

Įvykių (aibių) sudėtis ir daugyba susieti distributyvumo dėsniais:

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, čia $A,\ B,\ C \in \mathcal{F}(\Omega)$;
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, čia $A,\ B,\ C \in \mathcal{F}(\Omega)$.

2.4.1 pastaba. Užrašytos aibių veiksmų savybės teisingos ne tik aibės $\mathcal{F}(\Omega)$ poaibiams, kai Ω yra baigtinė ar skaiti, bet vietoje Ω gali būti bet kuri abstrakti aibė.

2.4.2 pratimai. Tegul X – abstrakti aibė, $A,\ B,\ A_j$ – aibės X poaibiai. Užrašas $\overline{A}$ žymi aibės A papildinį iki aibės X, t. y. $\overline{A} = X \setminus A$.

1. Įrodykite, kad $A \cap \overline{B} = A \setminus B$.
2. Įrodykite, kad $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (vadinami *de Morgano dėsniais*).
3. Įrodykite, kad teisingos lygybės:
   - $\overline{\bigcup\limits_{j \in I} A_j} = \bigcap\limits_{j \in I} \overline{A}_j$, čia I – indeksų aibė;
   - $\overline{\bigcap\limits_{j \in I} A_j} = \bigcup\limits_{j \in I} \overline{A}_j$, čia I – indeksų aibė.

2.5 σ-algebros ir diskrečiosios atsitiktinių įvykių erdvės

Apibrėžėme atsitiktinių įvykių erdvę kaip elementariųjų įvykių erdvės Ω visų poaibių aibę $F(\Omega)$ tuo atveju, kai aibė Ω yra baigtinė arba skaiti. Kalbant apie atsitiktinių įvykių erdvę $\mathcal{F}(\Omega)$, tikimybių teorijoje labai svarbu jos esminės savybės:

1. $\Omega \in \mathcal{F}(\Omega)$;
2. $A_j \in \mathcal{F}(\Omega),\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}(\Omega)$;
3. $A_j \in \mathcal{F}(\Omega),\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}(\Omega)$;
4. $A,\ B \in \mathcal{F}(\Omega) \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}(\Omega)$.

2.5.1 pastaba. Skaitytojas gali pastebėti, kad išvardytos aibės $\mathcal{F}(\Omega)$ savybės išlieka, jei vietoje natūraliųjų skaičių indeksų aibės $\mathbb{N}$ pasirinktume bet kurią abstrakčią indeksų aibę I. Norime pabrėžti, kad norint griežtai vientisai pagrįsti tikimybių teoriją, atliekant veiksmus su įvykiais galima nagrinėti tik skaičias įvykių sumas ir sandaugas. Todėl ir apsiribosime tik skaičiomis indeksų aibėmis.

2.5.2 pastaba. Pastebėsime, kad išvardytos aibės $\mathcal{F}(\Omega)$ savybės teisingos pačiu bendriausiu atveju, kai vietoje aibės Ω imtume bet kurią abstrakčią aibę X ir nagrinėtume aibės X visų poaibių aibę $\mathcal{F}(X)$. Bet ne bet kuriai abstrakčiai aibei X, atliekant elementariųjų įvykių erdvės vaidmenį, aibė $\mathcal{F}(X)$ gali būti interpretuojama kaip atsitiktinių įvykių erdvė. Pavyzdžiui, jei elementariųjų įvykių erdvė yra visų realiųjų skaičių aibė $\Omega = \mathbb{R}$, tai realiųjų skaičių aibės visų poaibių aibė $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ negali būti atsitiktinių įvykių erdve. Tai susiję su giliomis tikimybinio mato apibrėžimo loginėmis problemomis.

Išvardytos aibės $\mathcal{F}(\Omega)$ savybės gali būti formuluojamos kaip aksiomos labai svarbios sąvokos apibrėžimui.

2.5.3 apibrėžimas. Tegul X abstrakti aibė. Aibės X poaibių šeima $\mathfrak{F} \subset \mathcal{F}(X)$ yra vadinama *σ-algebra*, jei

1. $X \in \mathfrak{F}$;

2. $A_j \in \mathfrak{F},\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathfrak{F}$;

3. $A_j \in \mathfrak{F},\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathfrak{F}$;

4. $A,\ B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{F}$.

Ši aksiomų sistema perteklinė. σ-algebrą galima apibrėžti paprastesne aksiomų sistema.

2.5.4 apibrėžimas. Aibės X poaibių aibė $\mathfrak{F}$, tenkinanti sąlygas:

1. $X \in \mathfrak{F}$;

2. $A \in \mathfrak{F} \Rightarrow X \setminus A \in \mathfrak{F}$;

3. $A_j \in \mathfrak{F},\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathfrak{F}$,

yra vadinama *σ-algebra.*

2.5.5 išvada. $\emptyset \in \mathfrak{F}$, nes $\emptyset = X \setminus X$.

2.5.6 išvada. Tegul $\mathfrak{F}$ – aibės Ω poaibių σ-algebra. Tuomet,

$$A_j \in \mathfrak{F},\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \cap_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathfrak{F}.$$

Remdamiesi de Morgano dėsniu, galime užrašyti

$$\cap_{j\in\mathbb{N}} A_j = X \setminus (X \setminus \cap_{j\in\mathbb{N}} A_j) = X \setminus (\cup_{j\in\mathbb{N}} (X \setminus A_j)).$$

2.5.7 pavyzdys. Tegul X abstrakti aibė. Tuomet aibės X visų poaibių aibė $\mathcal{F}(X)$ ir $\{\emptyset,\ X\}$ yra σ-algebros. Tai dvi kraštutinės σ-algebros: galingiausia ir skurdžiausia.

2.5.8 pavyzdys. Tegul $\mathbb{Z}$ – sveikųjų skaičių aibė. Be galingiausios $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$ ir skurdžiausios $\{\emptyset, \mathbb{Z}\}$ σ-algebrų egzistuoja be galo daug tarpinių σ-algebrų. Keletą jų užrašysime:

1. $\{\emptyset,\ 2\mathbb{Z},\ 2\mathbb{Z}+1,\ \mathbb{Z}\}$, čia $2\mathbb{Z}$ – lyginių skaičių poaibis, $2\mathbb{Z}+1$ – nelyginių skaičių poaibis;

2. $\{\emptyset,\ 3\mathbb{Z},\ 3\mathbb{Z}{+}1,\ 3\mathbb{Z}{+}2,\ 3\mathbb{Z}{\cup}3\mathbb{Z}{+}1,\ 3\mathbb{Z}{\cup}3\mathbb{Z}{+}2.\ 3\mathbb{Z}{+}1{\cup}3\mathbb{Z}{+}2,\ \mathbb{Z}\}$, čia $3\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}{+}1$, $3\mathbb{Z}{+}2$ – sveikųjų skaičių, kuriuos dalijant iš 3, atitinkamai gaunamos liekanos, lygios 0, 1, 2, poaibiai;

3. Tegul n – fiksuotas natūralusis skaičius, $A_j = n\mathbb{Z} + j$ – sveikųjų skaičių, kuriuos dalijant iš n, gaunama liekana, kuri lygi j, poaibis, $0 \leqslant j < n$. Tuomet aibės $\mathbb{Z}$ poaibių šeima

$$\{\emptyset,\ A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \cdots \cup A_{j_s} \mid 0 \leqslant j_1,\ j_2, \ldots, j_s < n,\ 1 \leqslant s \leqslant n\}$$

yra σ-algebra, sudaryta iš 2^n elementų.

2.5.9 pastaba. Galima įrodyti, kad baigtinės σ-algebros turi 2^n elementų, $n \in \mathbb{N}$.

Kartais naudinga paprastesnė nei σ-algebros algebros sąvoka, kurios pakanka elementariųjų įvykių baigtinės aibės Ω atveju. Šios sąvokos apibrėžimą ir suformuluosime.

2.5.10 apibrėžimas. Aibės X visų poaibių aibės $\mathcal{F}(\Omega)$ poaibis $\mathfrak{F} \subset P(\Omega)$ yra vadinamas *algebra*, jei $X \in \mathfrak{F}$, poaibyje $\mathfrak{F}$ apibrėžta įvykių sudėtis $\cup$, įvykių daugyba $\cap$ ir įvykių atimtis $\setminus$, t. y.

1. $X \in \mathfrak{F}$;
2. $A,\ B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{F}$;
3. $A,\ B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$;
4. $A,\ B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{F}$.

Ši aksiomų sistema perteklinė.

2.5.11 uždavinys. Įrodykite, kad $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$.

Dabar galime suformuluoti bendresnį diskrečiosios atsitiktinių įvykių erdvės apibrėžimą.

2.5.12 apibrėžimas. Kai elementariųjų įvykių erdvė Ω yra skaiti arba baigtinė, tai bet kuri σ-algebra $\mathfrak{F} \subset \mathcal{F}(\Omega)$ yra vadinama *diskrečia atsitiktinių įvykių erdve.* σ-algebra $\mathcal{F}(\Omega)$ nesukelia jokių loginių problemų apibrėžiant tikimybinį matą.

3 Įvykių tikimybės

Tegul Ω – elementariųjų įvykių erdvė skaiti arba baigtinė. Elementaraus įvykio tikimybė yra matas, išreikštas skaičiumi, rodančiu bandymo metu elementaraus įvykio pasirodymo galimybę, tikėtinumą. Elementarių įvykių tikimybės apibrėžiamos taip, kad visų elementariųjų įvykių tikimybių suma būtų lygi 1. Tai tikimybių normavimo sąlyga. Pavyzdžiui, jei elementariųjų įvykių erdvė Ω yra baigtinė ir, jei elementariųjų įvykių pasirodymo galimybės vienodos, tai natūralu bandymo metu kiekvieno elementaraus įvykio pasirodymo tikimybę prilyginti skaičiui, gautam vienetą padalijus iš elementariųjų įvykių skaičiaus, t. y. $\frac{1}{|\Omega|}$. Jei elementariųjų įvykių tikimybės yra žinomos, tai atsitiktinio įvykio tikimybė lygi elementariųjų įvykių, sudarančių atsitiktinį įvykį, tikimybių sumai.

Tiriant įvairius procesus, reiškinius, sudarius matematinius modelius ir atliekant bandymus, bandymų metu elementariųjų įvykių pasirodymo galimybės nėra vienodos. Mokslo raidos metu buvo įvairių tikimybės apibrėžimų, kol Kolmogorovas pateikė tikimybių teorijos pagrindimą aksiomų sistema.

Pirmiausia suformuluosime bendrą tikimybinio mato apibrėžimą, o po to nagrinėsime atskirus atvejus.

3.1 Tikimybinis matas, tikimybinės erdvės

Tegul Ω – elementariųjų įvykių erdvė (nebūtinai skaiti ar baigtinė), $\mathfrak{F}$ – aibės Ω poaibių σ-algebra.

3.1.1 apibrėžimas. Funkcija

$$P : \mathfrak{F} \to [0,\ 1],$$

apibrėžta aibės Ω poaibių σ-algebroje $\mathfrak{F}$, yra vadinama *tikimybiniu matu*, jei:

1. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$;

2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$, čia $A,\ B \in \mathfrak{F}$;

3. $A_i \cap A_j = \emptyset$, čia $i \neq j$, kai $i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$P\big(\sum_{j\in\mathbb{N}} A_j\big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} P(A_j)$, $A_j \in \mathfrak{F}$;

4. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $\cap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset \Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} P(A_j) = 0$.

Ši aksiomų sistema perteklinė. 4 aksiomą galima įrodyti remiantis pirmomis trimis aksiomomis.

3.1.2 apibrėžimas. Trejetas $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$, čia Ω – abstrakti aibė (traktuojama kaip elementariųjų įvykių erdvė), $\mathcal{F}$ – aibės Ω poaibių σ-algebra (traktuojama kaip atsitiktinių įvykių σ-algebra),

$$P : \mathcal{F} \to [0,\ 1], \ \text{– tikimybinis matas,}$$

yra vadinamas *tikimybine erdve.*

Kai elementariųjų įvykių erdvė Ω yra baigtinė, tai aksiomų sistema, kuria apibrėžėme tikimybinį matą, formuluojama paprasčiau.

3.1.3 apibrėžimas. Tegul Ω yra baigtinė elementariųjų įvykių erdvė, $\mathcal{F}(\Omega)$ – aibės Ω visų poaibių aibė, t. y. įvykių algebra. Funkcija

$$P : \mathcal{F}(\Omega) \to [0,\ 1],$$

apibrėžta įvykių algebroje $\mathcal{F}(\Omega)$ yra vadinama *tikimybiniu matu*, jei:

1. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$;

2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$, čia $A, B \in \mathcal{F}(\Omega)$;

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, čia $A, B \in \mathcal{F}(\Omega)$, (atskiru atveju, jei $A \cap B = \emptyset$, tai $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$).

Skaičius $P(A)$, $A \in \mathcal{F}(\Omega)$, yra vadinamas *įvykio A tikimybe.* Tai matas, išreikštas skaičiumi, rodantis galimybę įvykti įvykiui A.

3.1.4 pavyzdys. Štai kaip galima apibrėžti tikimybinį matą, kai elementariųjų įvykių erdvė

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots, \omega_n\}$$

yra baigtinė. Tegul $\mathcal{F}(\Omega)$ – aibės Ω visų poaibių aibė, t. y., kaip žinome, įvykių algebra. Kiekvienam elementariajam įvykiui $\{\omega_j\} \in \Omega$ priskirkime skaičių $P(\omega_j) = p_j \geqslant 0$, taip, kad visų p_j suma būtų lygi 1:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Tuomet bet kurio atsitiktinio įvykio $A \subset \Omega$ (t. y. $A \in \mathcal{F}(\Omega)$) tikimybę $P(A)$ apibrėžkime taip:

$$P(A) = \sum_{j,\ \omega_j \in A} P(\omega_j).$$

Lengva įsitikinti, kad taip apibrėžta funkcija

$$P : \mathcal{F}(\Omega) \to [0,\ 1],$$

pasižymi savybėmis:

1. $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$;
2. Jei $A \subset B$, tai $P(A) \leqslant P(B)$, čia $A, B \in \mathcal{F}(\Omega)$;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, čia $A, B \in \mathcal{F}(\Omega)$,

t. y., yra tikimybinis matas, o trejetas $(\Omega,\ \mathcal{F}(\Omega),\ P)$ – tikimybinė erdvė.

3.2 Tikimybinio mato savybės

Remdamiesi tikimybinės erdvės tikimybinio mato savybėmis, suformuluosime, kaip apskaičiuojamos įvykių sumos, įvykių sandaugos, priešingų įvykių tikimybės.

1. Priešingų įvykių A ir $\bar{A}$ tikimybės susijusios lygybe

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

2. Jei įvykis A yra įvykio B poįvykis, tai

$$P(A) \leqslant P(B).$$

3. Dviejų įvykių A ir B sumos tikimybė užrašoma lygybe

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pasinaudoję dviejų įvykių A ir B sumos tikimybės formule, galime užrašyti trijų įvykių A, B ir C sumos tikimybės formulę

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P\big((A \cup B) \cap C\big) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) =$$

$$= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

Remiantis tikimybinio mato užrašytomis savybėmis, gauname, kad jei $A \cap B = \emptyset$, tai

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad \text{čia} \quad A, B \in \mathcal{F}(\Omega).$$

Bendruoju atveju atsitiktinių įvykių A_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, sumos tikimybė yra

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_j} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_j}).$$

Šią formulę galima įrodyti matematinės indukcijos metodu.

3.2.1 apibrėžimas. Įvykiai A ir B yra vadinami *nepriklausomais*, jei įvykių A ir B sandaugos tikimybė $P(A \cap B)$ yra lygi įvykių A ir B tikimybių $P(A)$ ir $P(B)$ sandaugai, t. y.

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B).$$

Apibrėžę sąlyginę tikimybę, nepriklausomų įvykių sąvoką aptarsime išsamiau.

3.2.1 Klasikinis tikimybės apibrėžimas

Atskiru atveju, kai elementariųjų įvykių erdvė Ω yra baigtinė ir elementarių įvykių tikimybės lygios, gauname klasikinės tikimybės apibrėžimą.

3.2.2 apibrėžimas (Klasikinė tikimybė). Tegul

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

elementariųjų įvykių erdvė, $\mathcal{F}(\Omega)$ – įvykių erdvė. Funkcija

$$P : \mathcal{F}(\Omega) \to \left\{\frac{j}{n} \mid 1 \leqslant j \leqslant n\right\},\ P(A) = \frac{|A|}{n},\ A \in \mathcal{F}(\Omega),$$

yra *klasikinis tikimybinis matas.*

Kaip matome, klasikinis tikimybės apibrėžimas remiasi elementariųjų įvykių erdvės Ω baigtinumu ir tuo, kad bandymo metu elementariųjų įvykių pasirodymo tikimybės lygios. Tuomet atsitiktinio įvykio A tikimybė apibrėžiama kaip elementariųjų įvykių, sudarančių įvykį A, skaičiaus $|A|$ ir visų elementariųjų įvykių skaičiaus $|\Omega|$ santykis, t. y. $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

Praktiškai, sprendžiant uždavinius, randamas vadinamųjų *palankių elementariųjų įvykių skaičius*, po to randamas vadinamasis *visų galimų atvejų skaičius*, o tų skaičių santykis ir yra ieškoma įvykio tikimybė. Nors klasikinės tikimybės apibrėžimas gana paprastas, bet klasikinės tikimybės uždaviniai būna labai sudėtingi. Klasikinės tikimybės pavyzdžiams ir uždaviniams skirsime daug dėmesio.

Panagrinėkime konkrečius pavyzdžius.

3.2.3 pavyzdys. Nagrinėkime n rutulių išdėstymus n dėžėse. Kokia tikimybė, atsitiktinai sudėjus rutulius į dėžes, kad tik viena dėžė liks tuščia?

Sprendimas. Pirmiausia išsiaiškinkime, keliais būdais n rutulių galima sudėlioti į n dėžių. Kiekvieną rutulį galima įdėti į kurią nors dėžę n būdais, nes yra n dėžių. Vadinasi, n rutulių galima išdėlioti į n dėžių n^n būdais.

Dabar išsiaiškinkime, keliais būdais rutulius galima sudėti į dėžes taip, kad tik viena dėžė liktų tuščia. Pastebėsime, kad rutulius sudėjus į dėžes taip, kad tik viena dėžė liktų tuščia, į kurią nors dėžę bus įdėti du rutuliai, o į kitas dėžes įdėta po vieną rutulį. Du rutulius išrinkti iš n rutulių galima $\binom{n}{2}$ būdais. Du išrinktus rutulius sudėti į kurią nors dėžę galima n būdais. Toliau po vieną rutulį įdėti į kurią nors dėžę galima $n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 2$ būdais. Tokiu būdu, ieškoma tikimybė yra lygi $\dfrac{\binom{n}{2}n!}{n^n}$.

3.2.4 pavyzdys. Grįžkime prie žaidimo kauliuko mėtymų. Kaip žinome, šiuo atveju elementariųjų įvykių erdvė

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\},$$

čia ω_j, $1 \leqslant j \leqslant 6$, yra įvykis, išmetus kauliuką, kad atsiverčia j akučių.

Kadangi kauliukas kubelio formos, kaip minėjome, vienam ar kitam akučių skaičiui atsiversti vienodos galimybės.

Dabar galime apibrėžti bet kurio elementaraus įvykio pasirodymo matą, vadinamą elementaraus įvykio tikimybe, išreikštą skaičiumi $1/6$. Šis skaičius atspindi mūsų intuityvią nuojautą, kad, išmetus kauliuką, bet kuriam akučių skaičiui atsiversti yra viena galimybė iš šešių. Dabar galime apibrėžti ir bet kurio atsitiktinio įvykio, sudaryto iš elementariųjų įvykių, matą, vadinamą *atsitiktinio įvykio tikimybe.* Atsitiktiniam įvykiui A priskirkime skaičių, lygų elementariųjų įvykių, sudarančių A, matų (tikimybių) sumai.

Užrašykime visa tai formaliai funkcijų kalba. Pirmiausia apibrėžiame funkciją

$$P : \Omega \to \left\{\frac{1}{6}\right\},\ \ P(\omega_j) = \frac{1}{6},\ \ \text{čia}\ \ 1 \leqslant j \leqslant 6.$$

Šią funkciją galime pratęsti iki funkcijos P, apibrėžtos aibės Ω visų poaibių aibėje $\mathcal{F}(\Omega)$ taip:

$$P : \mathcal{F}(\Omega) \to [0,\ 1],\ \ P(X) = \frac{|X|}{6},\ \ X \in \mathcal{F},\ \text{t. y.}\ \ X \subset \Omega,$$

čia $|X|$ – elementų skaičius aibėje X.

Dabar galime atsakyti, pavyzdžiui, į klausimą, kokia tikimybė, kad, mėtant kauliuką, atsivers lyginis akučių skaičius arba akučių skaičius, dalus iš trijų? Įvykio, kad atsivers lyginis akučių skaičius, tikimybė yra lygi 1/2. Iš tikrųjų: įvykis X, kad atsivers lyginis akučių skaičius, traktuojamas kaip poaibis

$$X = \{\omega_2,\ \omega_4,\ \omega_6\},$$

o

$$P(X) = \frac{1}{2}.$$

Įvykio, kad atsivers akučių skaičius, dalus iš 3, tikimybė yra lygi 1/3. Būtinojo įvykio Ω tikimybė lygi 1, o negalimo įvykio $\emptyset$ tikimybė lygi 0.

3.2.5 pavyzdys. Panašiai galime nagrinėti ir sudėtingesnių situacijų elementariuosius ir sudėtinius įvykius bei jų tikimybes. Pavyzdžiui, galime nagrinėti visus galimus įvykius metant kauliuką du kartus iš eilės. Intuityviai suvokiame, kad kauliuko antro metimo rezultatas nepriklauso nuo pirmo metimo rezultato. Šiuo atveju nagrinėkime aibę

$$\Omega = \big\{(\omega_i,\ \omega_j) \mid 1 \leqslant i,\ j \leqslant 6\big\},$$

kaip elementarių įvykių erdvę. Ši aibė sudaryta iš 36 elementų. Šios aibės elementus $(\omega_i,\ \omega_j)$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant 6$, įsivaizduokime kaip elementariuosius įvykius.

Kokias tikimybes priskirti šiems elementariems įvykiams? Išmetus kauliuką du kartus iš eilės, visi galimi įvykiai yra lygiaverčiai. Tuomet kiekvieno elementariojo įvykio tikimybė yra lygi 1/36. Panašiai kaip ir anksčiau, funkciją

$$p : \Omega = \big\{(\omega_i,\ \omega_j) \mid 1 \leqslant i,\ j \leqslant 6\big\} \to \left\{\frac{1}{36}\right\},$$

$$p\big((\omega_i,\ \omega_j)\big) = \frac{1}{36},\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant 6,$$

galime pratęsti iki funkcijos P, apibrėžtos aibės Ω visų poaibių aibėje $\mathcal{F}(\Omega)$ taip:

$$P : \mathcal{F}(\Omega) \to [0,\ 1],\ \ P(X) = \frac{|X|}{36},\ \ X \in \mathcal{F}(\Omega),\ \text{t. y. } X \subset \Omega.$$

Panašiai apibrėžiami būtinasis ir negalimas įvykiai ir jų tikimybės.

3.2.6 pavyzdys. Panašiai galima nagrinėti atvejį, kai kauliukas metamas n kartų. Šiuo atveju galime apibrėžti elementariųjų įvykių erdvę

$$\Omega = \big\{(\omega_{j_1},\, \omega_{j_2},\, \ldots,\, \omega_{j_n}) \mid 1 \leqslant j_1,\, j_2,\, \ldots, j_n \leqslant 6\big\}.$$

Visi elementarieji įvykiai lygiaverčiai, t. y. elementariojo įvykio

$$(\omega_{j_1},\, \omega_{j_2},\, \ldots,\, \omega_{j_n})$$

tikimybė yra lygi $\dfrac{1}{6^n}$.

3.2.7 pavyzdys. Tarkime, kad dėžėje yra m žalių ir n geltonų rutulių ir visi rutuliai vienodos formos. Ištraukti atsitiktinai bet kurį rutulį vienodos galimybės. Tikimybė atsitiktinai ištraukti žalią rutulį lygi $\frac{m}{m+n}$, o tikimybė atsitiktinai ištraukti geltoną rutulį lygi $\frac{n}{m+n}$. Dabar galima formuluoti įvairius uždavinius traukiant rutulius su sugrąžinimu ir apskaičiuoti vienų ar kitų įvykių tikimybes.

3.2.2 Hipergeometrinės tikimybės pavyzdys

Tai yra klasikinės tikimybės specialus pavyzdys. Pateiksime tipinį pavyzdį. Tegul dėžėje sudėta m juodų ir n baltų rutulių. Kokia tikimybė tarp atsitiktinai ištrauktų iš dėžės r rutulių yra s baltų rutulių?

Pirmiausia pastebėsime, kad ištraukti r rutulių iš $m+n$ rutulių galima $\binom{m+n}{r}$ būdais. Atsitiktinai ištrauktų r rutulių rinkinį iš $m+n$ rutulių galima traktuoti kaip elementarųjį įvykį. Kiekvieno elementaraus įvykio realizacija vienodai galima. Lieka išsiaiškinti, kiek elementarių įvykių sudaro įvykį: tarp atsitiktinai ištrauktų iš dėžės r rutulių yra s baltų rutulių. s baltų rutulių atsitiktinai ištraukiama iš n baltų rutulių. Tai galima padaryti $\binom{n}{s}$ būdais. Panašiai, atsitiktinai ištraukti $r-s$ juodų rutulių iš m juodų rutulių galima $\binom{m}{r-s}$ būdais.

Vadinasi, atsitiktinai ištraukti iš dėžės r rutulių, tarp kurių būtų s baltų rutulių, galima $\binom{n}{s}\binom{m}{r-s}$ būdais.

Tikimybė, kad tarp atsitiktinai ištrauktų iš dėžės r rutulių yra s baltų rutulių, yra lygi

$$\frac{\binom{n}{s}\binom{m}{r-s}}{\binom{m+n}{r}}.$$

Nagrinėdami hipergeometrines tikimybes, gauname įdomų sąryšį tarp Niutono binomo koeficientų. Grįžkime prie ką tik išnagrinėto pavyzdžio. Traukdami r rutulių iš dėžės, kurioje sudėta m juodų ir n baltų rutulių, galime suskaičiuoti visus galimus atvejus dviem būdais. Jau žinome, kad ištraukti r rutulių iš $m+n$ galima $\binom{m+n}{r}$ būdais. Visus galimus atvejus galima suskaičiuoti ir šitaip:

$$\sum_{s=0}^{r} \binom{n}{s}\binom{m}{r-s}.$$

Jei Niutono binomo koeficiente $\binom{n}{s}$ $s > n$, tai šis koeficientas

$$\binom{n}{s} = 0.$$

Sulyginę visų galimų atvejų skaičius, gauname įdomią lygybę

$$\sum_{s=0}^{r} \binom{n}{s}\binom{m}{r-s} = \binom{m+n}{r}.$$

3.2.3 Statistinis tikimybės apibrėžimas

Statistinis tikimybės apibrėžimas paremtas bandymo metu įvykusių įvykių dažniu. Daug kartų atliekant bandymą, nekeičiant bandymo sąlygų, stebimi įvykių pasirodymo dažniai.

Pavyzdžiui, atliekant bandymą n kartų, n_1 kartų įvyko įvykis A_1, n_2 kartų – įvykis $A_2, \ldots, n_r$ kartų – įvykis A_r, čia $n_1+n_2+\ldots+n_r = n$. Tuomet, kai n pakankamai didelis, tikimasi, kad skaičiai $\frac{n_1}{n}$, $\frac{n_2}{n}$, ..., $\frac{n_r}{n}$, pakankamai artimi įvykių A_1, A_2, ..., A_r, tikimybėms. Ribos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_j}{n} = p_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

(jei būtų galima griežtai įrodyti, kad jos egzistuoja), tiksliai apibrėžtų statistines įvykių tikimybes.

Praktiškai statistinės įvykių tikimybės naudojamos atliekant tyrimus socialiniuose moksluose, medicinoje, gamyboje ir t. t.

Pavyzdžiui, statistiškai galima tirti įvairių žmonių grupių įvairiose vietovėse tikimybes išgyventi iki tam tikro amžiaus, tikimybes gimti vienos ar kitos lyties naujagimiui. Pastebėta, kad šalyse po karo, kai karo metu žūdavo žymiai daugiau vyrų nei moterų, tikimybė gimti berniukui padidėdavo. Gamtoje visur egzistuoja pusiausvyra ir kai nuo jos nukrypstama neperžengiant tam tikrų ribų, pusiausvyra atsistato. Yra žinoma, kad statistinė tikimybė Lietuvoje išgyventi moteriai iki 80 metų yra didesnė nei vyrui.

3.3 Sąlyginės tikimybės, nepriklausomi įvykiai

Tegul $(\Omega,\ \mathcal{F}(\Omega),\ P)$ yra tikimybinė erdvė. Tarkime, įvykio B tikimybė yra $P(B) > 0$. Kokia įvykio A tikimybė, jei žinoma, kad bandymo metu įvyko įvykis B? Įvykio A tikimybė, bandymo metu įvykus įvykiui B, yra žymima $P(A \,|\, B)$ ir apibrėžiama lygybe

$$P(A \,|\, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Šią lygybę galime perrašyti taip

$$P(A \cap B) = P(A \,|\, B) \cap P(B).$$

Tarkime, kad tarp n objektų yra n_A objektų, turinčių savybę A, ir galimybės išsirinkti bet kurį objektą yra lygiavertės. Tuomet tikimybė išsirinkti bet kurį objektą yra lygi $1/n$, o išsirinkti objektą, turintį savybę A yra lygi $P(A) = \dfrac{n_A}{n}$. Sakykime, išsirinkome objektą, pasižyminčiu savybe B. Kokia tikimybė, kad išrinktas objektas turi ir savybę A? Norint atsakyti į šį klausimą, reikia žinoti, kiek tarp objektų, turinčių savybę B, yra objektų, turinčių ir savybę A.

Sakykime, kad yra n_B objektų, turinčių savybę B, ir n_{AB} objektų, turinčių savybę A ir B. Tuomet atsakymas į suformuluotą klausimą yra

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Anksčiau atsitiktinius įvykius A ir B vadinome nepriklausomais, jei įvykių A ir B sandaugos tikimybė $P(A \cap B)$ buvo lygi įvykių A ir B tikimybių $P(A)$ ir $P(B)$ sandaugai

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B).$$

Dabar, pasinaudoję sąlyginės tikimybės apibrėžimu, atsitiktinių įvykių A ir B neprklausomumą galima dar ir kitaip apibrėžti.

3.3.1 apibrėžimas. Atsitiktiniai įvykiai A ir B yra vadinami *nepriklausomais*, jei

$$P(A \,|\, B) = P(A).$$

Akivaizdu, kad abu apibrėžimai ekvivalentūs, nes

$$P(A \cap B) = P(A \,|\, B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B).$$

3.3.1 Pilnosios tikimybės formulė

Tegul $(\Omega,\ \mathcal{F}(\Omega),\ P)$ yra tikimybinė erdvė.

3.3.2 apibrėžimas. Įvykių šeima $B_1, B_2, \dots B_n$ yra vadinama *pilna*, jei bet kuriems $i \neq j$, B_i ir B_j yra nesuderinami įvykiai, o jų visų suma yra būtinasis įvykis.

3.3.3 teiginys. Tegul įvykių šeima $B_1, B_2, \dots B_n$ yra pilna. Tuomet

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) P(B_j).$$

Ši formulė yra vadinama *pilnosios tikimybės formule.*

Įrodymas. Užrašome akivaizdžias lygybes

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\big(A \cap (\cup_{j=1}^{n}) B_j\big) = P\big(\cup_{j=1}^{n} (A \cap B_j)\big) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} P(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) P(B_j).$$

Priešpaskutinė lygybė teisinga, nes bet kuriems $i \neq j$,

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset.$$

3.3.2 Bajeso formulė

Tegul įvykių šeima $B_1, B_2, \ldots B_n$ yra pilna. Užrašykime lygybes

$$P(A \cap B_j) = P(A|B_j)P(B_j) = P(B_j|A)P(A), \ \text{čia} \ 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Tuomet tikimybes $P(B_j|A)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, galima apskaičiuoti naudojantis *Bajeso formule*:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}.$$

Pilnosios tikimybės ir Bajeso formulės labai naudingos sprendžiant uždavinius.

Panagrinėkime pavyzdžius.

3.3.4 pavyzdys. Tarkime žinoma, kad išmetus žaidimo kauliuką, atsivertė lyginis akučių skaičius (įvykis B). Kokia tikimybė, kad atsivertė 4 akutės (įvykis A)?

Sprendimas. Kadangi lyginis akučių skaičius gali atsiversti tik tuo atveju, kai atsiverčia dvi, keturios ar šešios akutės, tai akivaizdu, kad ieškoma tikimybė lygi 1/3.

Akivaizdu, kad $P(A \cap B) = P(A) = \dfrac{1}{6}$, o $P(B) = \dfrac{1}{2}$.

Vadinasi,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

3.3.5 pavyzdys. Tarkime, kad šeimose, kuriose auga keturi vaikai, vaikų pasiskirstymas pagal lytį lygiavertis. Tegul A yra įvykis, kad šeimoje auga keturi skirtingų lyčių vaikai, B yra įvykis, kad keturių vaikų šeimoje auga ne daugiau nei viena mergaitė. Ar šie įvykiai priklausomi?

Sprendimas. Įvykio A tikimybė yra

$$P(A) = \frac{14}{16},$$

įvykio B tikimybė yra

$$P(B) = \frac{5}{16},$$

o įvykio $A \cap B$ tikimybė

$$P(A \cap B) = \frac{4}{16}.$$

Kadangi $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, tai įvykiai A ir B nėra nepriklausomi.

3.3.6 uždavinys. Tegul A yra įvykis, kad šeimoje auga trys skirtingų lyčių vaikai, B yra įvykis, kad trijų vaikų šeimoje auga ne daugiau nei viena mergaitė. Įsitikinkite, kad įvykiai A ir B nepriklausomi.

Pateiksime pilnosios tikimybės formulės taikymo pavyzdį.

3.3.7 pavyzdys. Vienoje dėžėje yra 3 balti ir 7 geltoni rutuliai, o kitoje dėžėje yra 5 balti ir 9 geltoni rutuliai. Iš vienos ir kitos dėžės atsitiktinai išimame po vieną rutulį, o likusius dėžėse rutulius sudedame į trečią dėžę. Kokia tikimybė iš trečios dėžės ištraukti baltą rutulį?

Sprendimas. Pažymėkime raide B įvykį iš trečios dėžės ištraukti baltą rutulį, o raidėmis B_j, G_j, – įvykius, kad iš j dėžės, $j = 1, 2$, išimtas baltas, geltonas rutuliai. Užrašykime pilnos tikimybės formulę

$$P(B) = P(B \mid B_1 \cap B_2)P(B_1 \cap B_2) + P(B \mid B_1 \cap G_2)P(B_1 \cap G_2) +$$

$$+ P(B \mid G_1 \cap B_2)P(G_1 \cap B_2) + P(B \mid G_1 \cap G_2)P(G_1 \cap G_2).$$

Iš uždavinio sąlygos galime užrašyti

$$P(B \mid B_1 \cap B_2) = \frac{6}{22},\ P(B \mid B_1 \cap G_2) = \frac{7}{22},$$

$$P(B \mid G_1 \cap B_2) = \frac{7}{22},\ P(B \mid G_1 \cap G_2) = \frac{8}{22},$$

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{14} = \frac{15}{140},\ P(B_1 \cap G_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{9}{14} = \frac{27}{140},$$

$$P(G_1 \cap B_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{14} = \frac{35}{140}, \ P(G_1 \cap G_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{14} = \frac{63}{140}.$$

Įrašę į pilnosios tikimybės formulę šiuos duomenis, gauname

$$P(B) = \frac{6}{22} \cdot \frac{15}{140} + \frac{7}{22} \cdot \frac{27}{140} + \frac{7}{22} \cdot \frac{35}{140} + \frac{8}{22} \cdot \frac{63}{140} = \frac{257}{770}.$$

3.3.3 Pavyzdžiai, skirti sąlyginėms tikimybėms

3.3.8 pavyzdys. Iš aibės

$$\{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$$

atsitiktinai be sugrąžinimo išrenkami trys skaičiai

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3.$$

Raskite sąlyginę tikimybę

$$P(\xi_1 < \xi_3 < \xi_2 \mid \xi_1 < \xi_2),$$

kad trečiasis skaičius didesnis už pirmąjį ir mažesnis už antrąjį, jei žinoma, kad $\xi_1 < \xi_2$, t. y. pirmasis skaičius yra mažesnis už antrąjį.

Sprendimas. Tegul A yra įvykis, kad $\xi_1 < \xi_2$, o B – įvykis $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$. Kaip žinome,

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{6}.$$

Tuomet

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)},$$

nes $A \subset B$. Ieškoma tikimybė yra lygi

$$P(B \mid A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

3.3.9 pavyzdys. Iš šimto bilietų, ant kurių užrašyti skaičiai

$$00,\ 01,\ \ldots, 98,\ 99,$$

atsitiktinai ištraukiamas vienas bilietas. Tegul η_1 yra ant bilieto užrašyto skaičiaus skaitmenų sumą, o η_2 – skaitmenų sandaugą. Raskite sąlyginę tikimybę

$$P(\eta_1 = j \mid \eta_2 = 0),\ 0 \leqslant j \leqslant 18.$$

Šį uždavinį galima išspręsti dviem būdais.

Pirmasis sprendimo būdas. $\eta_2 = 0$ skaičiams

$$00,\ \ldots,\ 09,\ 10,\ 20, \ldots, 90.$$

Jų yra 19. Iš išrašytų skaičių matome, kad

$$P(\eta_1 = 0 \mid \eta_2 = 0) = \frac{1}{19},$$

$$P(\eta_1 = j \mid \eta_2 = 0) = \frac{2}{19},\ 1 \leqslant j \leqslant 9.$$

Kai $10 \leqslant j \leqslant 19$, tai $P(\eta_1 = j \mid \eta_2 = 0) = 0$.

Antrasis sprendimo būdas. Sąlyginė tikimybė

$$P(\eta_1 = j \mid \eta_2 = 0) = \frac{P\big(\{\eta_1 = j\} \cap \{\eta_2 = 0\}\big)}{P(\eta_2 = 0)}.$$

Akivaizdu, kad

$$P(\eta_2 = 0) = \frac{19}{100},\ P\big(\{\eta_1 = 0\} \cap \{\eta_2 = 0\}\big) = \frac{1}{100},$$

$$P\big(\{\eta_1 = j\} \cap \{\eta_2 = 0\}\big) = \frac{2}{100},\ 1 \leqslant j \leqslant 9,$$

ir

$$P\big(\{\eta_1 = j\} \cap \{\eta_2 = 0\}\big) = 0,\ 10 \leqslant j \leqslant 18.$$

Įrašę šiuos skaičius į formulę, gauname ieškomą tikimybę.

3.3.10 pavyzdys. Dėžėje yra m baltų rutulių ir $n-m$ – juodų rutulių. Iš šios dėžės atsitiktinai vienas po kito traukiami rutuliai. Tegul

$$A_0^{(j)},\ \ A_1^{(j)}$$

yra įvykiai, kad ištrauktas j-asis rutulys atitinkamai yra juodas arba baltas. Raskite sąlyginę tikimybę

$$p(A_1^{(r+1)} \mid A_{\varepsilon_1}^{(1)} A_{\varepsilon_2}^{2)} \dots A_{\varepsilon_r}^{(r)}),\ \varepsilon_j = 0,\ 1,\ 1 \leqslant j \leqslant r,$$

jei

- rutuliai traukiami be sugrąžinimo;
- rutuliai traukiami sugrąžinant juos į dėžę.

Sprendimas.

- Akivaizdu, kad
$$p(\ A_{\varepsilon_1}^{(1)} A_{\varepsilon_2}^{2)} \dots A_{\varepsilon_r}^{(r)}) =$$
$$= \frac{m \cdots (m-(a-1))(n-m) \cdots (n-m-(b-1))}{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(a+b-1))},$$
čia a žymi ε_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, lygių vienam, skaičių, b žymi ε_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, lygių nuliui, skaičių.

  Pastebime, kad
$$a + b = r,\ a = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_r$$

  Panašiai galime užrašyti
$$p(A_1^{(r+1)} A_{\varepsilon_1}^{(1)} A_{\varepsilon_2}^{2)} \dots A_{\varepsilon_r}^{(r)}) =$$
$$= \frac{m \cdots (m-a)(n-m) \cdots (n-m-(b-1))}{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(a+b))(n-(a+b+1))}.$$

  Ieškoma tikimybė lygi
$$p(A_1^{(r+1)} \mid A_{\varepsilon_1}^{(1)} A_{\varepsilon_2}^{2)} \dots A_{\varepsilon_r}^{(r)}) = \frac{m - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_r}{n-r}.$$

- Antru atveju ieškoma tikimybė lygi $\dfrac{m}{n}$.

3.3.11 pavyzdys. Iš aibės

$$\{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$$

atsitiktinai su sugrąžinimu išrenkami du poaibiai A_1 ir A_2. Raskite sąlyginę tikimybę

$$p\big(\mid A_1 \mid = n_1,\ \mid A_2 \mid = n_2 \ |A_1 \cap A_2 = \emptyset\big).$$

Sprendimas. Poaibį A_1 galima išrinkti

$$\mathrm{C}_N^{n_1}$$

būdų, o poaibį A_2 –

$$\mathrm{C}_{N-n_1}^{n_2}$$

būdų. Taigi palankių atvejų skaičius yra lygus

$$\mathrm{C}_N^{n_1} \cdot \mathrm{C}_{N-n_1}^{n_2}.$$

Keliais būdais galima išrinkti poaibius A_1 ir A_2, tenkinančius sąlygą

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset?$$

Tai galima padaryti

$$\sum_{j_1, j_2 \geqslant 0,\, j_1 + j_2 \leqslant N} \mathrm{C}_N^{j_1} \mathrm{C}_{N-j_1}^{j_2} =$$
$$= \sum_{j_1, j_2 \geqslant 0,\, j_1 + j_2 \leqslant N} \frac{N!}{j_1! j_2! (N - j_1 - j_2)!} =$$
$$= \sum_{j_1, j_2, j_3 \geqslant 0,\, j_1 + j_2 + j_3 = N} \frac{N!}{j_1! j_2! j_3!} = 3^N$$

būdų.

Pastarąją lygybę gauname taip. Matematinės indukcijos metodu galima įrodyti lygybę (Niutono binomo apibendrinimą)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^N =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n \geqslant 0,\, j_1 + j_2 + \cdots + j_n = N} \binom{N}{\mathbf{j}} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \ldots x_n^{j_n},$$

čia $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ – multiindeksas, $\binom{N}{\mathbf{j}} = \frac{N!}{j_1! \ldots j_n!}$. Vietoje

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

įrašę 1, gauname

$$\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n \geqslant 0,\, j_1 + j_2 + \cdots + j_n = N} \binom{N}{\mathbf{j}} = n^N.$$

Ieškoma tikimybė yra lygi

$$\frac{N!}{3^N \cdot n_1! n_2! (N - n_1 - n_2)!}.$$

3.4 Bernulio schema

Nagrinėsime situaciją, kai, kiek kartų beatliktume bandymą, kiekvieno bandymo metu gali įvykti tik įvykis A su tikimybe p arba jam priešingas įvykis $\bar{A}$ su tikimybe q, $p + q = 1$. Įvykį A, pavyzdžiui, galime pavadinti sėkme, o įvykį $\bar{A}$ – nesėkme. Ši situacija yra vadinama *Bernulio schema.*

Kokia tikimybė, atlikus n bandymų pagal Bernulio schemą, kad k kartų įvyks įvykis A, $n - k$ kartų – įvykis $\bar{A}$? Pirmiausia pastebėsime, kad, atlikus n bandymų pagal Bernulio schemą, bandymai, kai įvykdavo sėkmės įvykis A, gali išsidėstyti $\binom{n}{k}$ būdais tarp visų n bandymų (t. y. derinių be pasikartojimų skaičius iš n elementų po k elementų). Kiekvieno k įvykių A ir $n - k$ įvykių $\bar{A}$ išsidėstymo n bandymų serijoje tikimybė yra lygi $p^k q^{n-k}$, nes kiekvieno bandymo rezultatai nepriklauso nuo prieš tai atlikto bandymo rezultatų. Vadinasi, atlikus

n bandymų pagal Bernulio schemą, kad k kartų įvyks įvykis A, $n-k$ kartų – įvykis $\bar{A}$, tikimybė yra lygi

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Šį skaičių žymėsime $b(k; n,\ p)$. Tikimybės

$$b(k; n,\ p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

yra vadinamos *binominėmis.*

Kai n pakankamai didelis, o p pakankamai mažas, tai apskaičiuojant tikimybę

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

galima pasinaudoti artutine formule

$$b(k; n,\ p) = \mathrm{C}_n^k\ p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{čia} \ \ \lambda = n \cdot p.$$

Užrašyta artutinė formulė binominei tikimybei apskaičiuoti yra bendresnės formulės

$$\left| \sum_{k \in B} b(k; n,\ p) - \sum_{k \in B} \frac{(np)^k}{n!} e^{-np} \right| \leqslant np^2,$$

čia

$$B \subset \{0,\ 1,\ 2,\ \dots\}$$

bet kuris neneigiamų sveikųjų skaičių aibės poaibis, atskiras atvejis.

Pastaroji nelygybė net įgalina įvertinti paklaidą, gaunamą taikant artutinę formulę binominei tikimybei apskaičiuoti.

3.5 Tikimybių $b(k; n,\ p)$ kitimas, keičiant k reikšmes

Įdomu išsiaiškinti, kaip kinta funkcijos $b(k; n,\ p)$ reikšmės priklausomai nuo k. Koks, atlikus n bandymų, labiausiai įtikimas įvykio A pasirodymo skaičius k priklausomai nuo p ir q. Šį klausimą galime ir kitaip suformuluoti: kokiai k reikšmei esant, tikimybė $b(k; n,\ p)$ įgyja didžiausią reikšmę? Tuo tikslu panagrinėkime santykį

$$\frac{b(k;\ n,p)}{b(k-1;\ n,p)} = \frac{\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{kq}.$$

Iš pastarosios trupmenos išskirkime vienetą

$$\begin{aligned}\frac{b(k;\ n,p)}{b(k-1;\ n,p)} &= \frac{(n-k+1)p}{kq} = \\ =&\frac{k(1-p)+np+p-k}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq}.\end{aligned}$$

Pastebime, jei $k < (n+1)p$, tai $\dfrac{b(k;\ n,p)}{b(k-1;\ n,p)} > 1$, o jei $k > (n+1)p$, tai $\dfrac{b(k;\ n,p)}{b(k-1;\ n,p)} < 1$. Jei skaičius $(n+1)p = s$ yra sveikas skaičius, tai $b(s;\ n,p) = b(s-1;\ n,p)$, tikimybės $b(j;\ n,p)$, kai j kinta nuo 0 iki skaičiaus $s-1$, didėja, o tikimybės $b(j;\ n,p)$, kai j kinta nuo s iki skaičiaus n, mažėja. Jei skaičius $(n+1)p$ nėra sveikas skaičius, tai tik vienintelis sveikas skaičius s tenkina sąlygą $(n+1)p-1 < s < (n+1)p$. Tuomet tikimybė $b(s;\ n,p)$ įgyja didžiausią reikšmę. Šiuo atveju tikimybės $b(j;\ n,p)$, kai j kinta nuo 0 iki skaičiaus s, didėja, o tikimybės $b(j;\ n,p)$, kai j kinta nuo s iki skaičiaus n, mažėja.

Sėkmės, ne mažiau (ne daugiau) nei r atvejų, tikimybių įverčiai. Vėl užrašykime binominių tikimybių santykį

$$\frac{b(k;\ n,p)}{b(k-1;\ n,p)} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq}.$$

Trupmena $\dfrac{(n+1)p-k}{kq}$, padidinus skaičių k, sumažėja, nes skaitiklis sumažėja, o vardiklis padidėja. Vadinasi, binominių tikimybių santykis

$$\frac{b(k;\ n,p)}{b(k-1;\ n,p)} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq},$$

padidinus skaičių k, sumažėja. Tuomet, tarę, kad $k \geqslant r+1$, galime užrašyti nelygybes

$$\frac{b(k;\ n,p)}{b(k-1;\ n,p)} \leqslant 1 + \frac{(n+1)p-(r+1)}{(r+1)q} = \frac{(n-r)p}{(r+1)q}.$$

Šiose nelygybėse, kai $k > r+1$, kairioji pusė griežtai mažesnė už dešiniąją. Į šias nelygybes vietoje k įrašę reikšmes $r+t$, $1 \leqslant t \leqslant m \leqslant n-r$, ir sudauginę, gauname

$$\frac{b(r+m;\ n,p)}{b(r;\ n,p)} < \left(\frac{(n-r)p}{(r+1)q}\right)^m$$

arba

$$b(r+m;\ n,p) < b(r;\ n,p)\left(\frac{(n-r)p}{(r+1)q}\right)^m.$$

Kai $r \geqslant np$, tai $\frac{(n-r)p}{(r+1)q} < 1$. Šiuo atveju užrašome nelygybę

$$\sum_{m=0}^{n-r} b(r+m;\ n,p) < b(r;\ n,p)\sum_{m=0}^{n-r}\left(\frac{(n-r)p}{(r+1)q}\right)^m <$$

$$< b(r;\ n,p)\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(n-r)p}{(r+1)q}\right)^m = b(r;\ n,p)\frac{(r+1)q}{r+1-(n+1)p}.$$

Gavome tikimybės, kad, atlikus n bandymų pagal Bernulio schemą, sėkmė lydės ne mažiau nei r kartų, kai $r \geqslant np$, įvertį.

Panašiai galime gauti tikimybės, kad, atlikus n bandymų pagal Bernulio schemą, sėkmė lydės ne daugiau nei r kartų, kai $r \leqslant np$, įvertį. Remdamiesi lygybe

$$\frac{b(r;\ n,p)}{b(r-1;\ n,p)} = \frac{(n-r+1)p}{rq},$$

gauname, kad

$$b(r-1;\ n,p) = b(r;\ n,p)\frac{rq}{(n-r+1)p}.$$

Kadangi $\frac{rq}{(n-r+1)p}$ mažėja, mažinant r, tai galime užrašyti nelygybes

$$b(r-s;\ n,p) \leqslant b(r;\ n,p)\left(\frac{rq}{(n-r+1)p}\right)^s.$$

Jei $r \leqslant np$, tai $\frac{rq}{(n-r+1)p} < 1$. Pagaliau gauname tikimybės, kad, atlikus n bandymų pagal Bernulio schemą, sėkmė lydės ne daugiau nei r kartų, kai $r \leqslant np$, įvertį

$$\sum_{s=0}^{r} b(r-s;\ n,p) \leqslant b(r;\ n,p)\sum_{s=0}^{r}\left(\frac{rq}{(n-r+1)p}\right)^s <$$

$$< b(r;\ n,p)\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{rq}{(n-r+1)p}\right)^s = b(r;\ n,p)\frac{(n-r+1)p}{(n+1)p-r}.$$

3.6 Pavyzdžiai, kai negalima išsiversti klasikine tikimybe

3.6.1 pavyzdys. Tarkime, kad vienu metu metami du vienodi kauliukai. Kokia šiuo atveju elementariųjų įvykių erdvė ir kokios jų tikimybės?

Sprendimas. Pavyzdžiui, vieną kartą metus du vienodus kauliukus, iškrito 3 ir 6 akutės. Tarkime, kad antrą kartą metus tuos kauliukus, vėl iškrito 3 ir 6 akutės. Šie įvykiai neatskiriami, nors antrą kartą metus kauliukus 3 akutės gal atsivertė to kauliuko, kurio 6 akutės atsivertė metus kauliukus pirmą kartą. Kai kauliuką metame du kartus iš eilės ir, jei atsiverčia 3 akutės metus kauliuką pirmą kartą ir 6 akutės atsiverčia, metus kauliuką antrą kartą, tai šis įvykis skiriasi nuo įvykio, kai 6 akutės atsiverčia, metus kauliuką pirmą kartą, ir 3 akutės atsiverčia, metus kauliuką antrą kartą. Šiuo atveju, metant du vienodus kauliukus tuo pačiu metu, aibė

$$\Omega = \big\{\{\omega_i,\ \omega_j\}\ |1 \leqslant i,j \leqslant 6\big\},$$

čia $\{\omega_i,\ \omega_j\}$ – aibė, sudaryta iš elementų ω_i ir ω_j, traktuojama kaip elementariųjų įvykių erdvė. Visi elementarieji įvykiai nėra lygiaverčiai. Elementariųjų įvykių skaičius $|\Omega| = \binom{6}{2} + 6 = 21$. Elementariųjų įvykių tikimybes apibrėžkime taip:

$$\begin{cases} P\big(\{\omega_j, \omega_j\}\big) = \dfrac{1}{36}, & \text{čia } 1 \leqslant j \leqslant 6, \\ P\big(\{\omega_i, \omega_j\}\big) = \dfrac{1}{18}, & \text{čia } 1 \leqslant i < j \leqslant 6. \end{cases}$$

3.6.2 pavyzdys. Metame tris neatskiriamus kauliukus. Tuomet atsivertusių akučių skaičių suma gali būti nuo 3 iki 18. Rasime tikimybes, kad atsivertusių akučių skaičių suma lygi j, $3 \leqslant j \leqslant 18$.

Sprendimas. Tuo tikslu sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = j, \end{cases}$$

čia x_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, – atsivertusių i akučių skaičius.

Užrašytosios lygčių sistemos sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais skaičius yra lygus palankių įvykių skaičiui. Visų galimų įvykių skaičius yra lygus lygties

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$$

sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais skaičiui, t. y. derinių su pasikartojimais iš 6 po 3 skaičiui. Šis skaičius yra $\binom{8}{3} = 56$. Norint surasti užrašytosios lygčių sistemos sprendinių skaičių, patogiau spręsti jai ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3, \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 = j - 3, \end{cases} \tag{4}$$

Pažymėję lygties (4) sprendinių skaičių $N(j)$, tikimybę

$$p_j = \frac{N(j)}{56},$$

sudarome lentelę

j	$N(j)$	p_j
3	1	1/56
4	1	1/56
5	2	2/56
6	3	3/56
7	4	4/56
8	5	5/56
9	6	6/56
10	6	6/56

j	$N(j)$	p_j
11	6	6/56
12	6	6/56
13	5	5/56
14	4	4/56
15	3	3/56
16	2	2/56
17	1	1/56
18	1	1/56

3.6.3 pavyzdys. Metame keturis neatskiriamus kauliukus. Tuomet atsivertusių akučių skaičių suma gali būti nuo 4 iki 24. Rasime tikimybes, kad atsivertusių akučių skaičių suma lygi j, $4 \leqslant j \leqslant 24$.

Sprendimas. Tuo tikslu sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + \ x_5 + \ x_6 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = j, \end{cases}$$

čia, kaip ir anksčiau, x_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, – atsivertusių i akučių skaičius.

Užrašytosios lygčių sistemos sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais skaičius yra lygus palankių įvykių skaičiui. Visų galimų įvykių skaičius yra lygus lygties

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4$$

sprendinių sveikais neneigiamais skaičiais skaičiui, t. y. derinių su pasikartojimais iš 6 po 4 skaičiui. Šis skaičius yra $\binom{9}{4} = 126$. Norint surasti užrašytos lygčių sistemos sprendinių skaičių, patogiau spręsti jai ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 + \ \ x_6 = 4, \\ \qquad\ \ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 = j - 4. \end{cases} \tag{5}$$

Pažymėję lygties (5), sprendinių skaičių $N(j)$, tikimybę

$$p_j = N(j)/126,$$

sudarome lentelę

j	$N(j)$	p_j
4	1	1/126
5	1	1/126
6	2	2/126
7	3	3/126
8	5	5/126
9	6	6/126
10	8	8/126
11	9	9/126
12	11	11/126
13	11	11/126
14	12	12/126

j	$N(j)$	p_j
15	11	11/126
16	11	11/126
17	9	9/126
18	8	8/126
19	6	6/126
20	5	5/126
21	3	3/126
22	2	2/126
23	1	1/126
24	1	1/126

3.6.4 pavyzdys. Metame 4 neatskiriamus kauliukus. Kokios gali būti atsivertusių akučių konfigūracijos ir kokios tų konfigūracijų tikimybės? Kokios konfigūracijų tikimybės atskiriamų kauliukų (arba kauliuką metant keturis kartus) atveju?

Sprendimas. Štai lentelė, kurioje surašyti visi rezultatai.

4-to skaidiniai		Konfigūracijos		p	P
4	1	(i^4)	6	6/126	6/1296
3+1	4	(i^3j)	30	30/126	120/1296
2+2	6	(i^2j^2)	15	15/126	90/1296
2+1+1	12	(i^2jk)	60	60/126	720/1296
1+1+1+1	24	$(ijkl)$	15	15/126	360/1296

Pirmame stulpelyje užrašyti skaičiaus 4 skaidiniai, o trečiame – kiekvieną skaidinį atitinkanti konfigūracija. Užrašas, pavyzdžiui, i^3j suprantamas, kad atsivertusių trijų kauliukų akučių skaičiai lygūs skaičiui i, o ketvirtojo kauliuko atsivertusio akučių skaičius lygus j, $i \neq j$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant 6$. Antrame stulpelyje užrašyti konfigūracijų skaičiai, o ketvirtame – neatskiriamų kauliukų atsivertusių akučių konfigūracijų skaičius. Skaičių, esantį antrame stulpelyje, sudauginę su skaičiumi, esančiu toje pat eilutėje ir ketvirtame stulpelyje, gauname atskiriamų kauliukų atsivertusių akučių konfigūracijos, esančios toje pat eilutėje, kaip ir dauginamieji skaičiai, skaičių. Neatskiriamų kauliukų visų galimų atsivertusių akučių konfigūracijų skaičius yra lygus derinių su pasikartojimais iš 6 po 4 skaičiui $\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = 126$. Tuo tarpu atskiriamų kauliukų visų galimų atsivertusių akučių konfigūracijų skaičius yra lygus gretinių su pasikartojimais iš 6 po 4 skaičiui $6^4 = 1296$. Penktame ir šeštame stulpeliuose surašytos atitinkamai neatskiriamų ir atskiriamų kauliukų atsivertusių akučių konfigūracijų tikimybės.

3.6.5 pavyzdys. Metame 5 neatskiriamus kauliukus. Kokios gali būti atsivertusių akučių konfigūracijos ir kokios tų konfigūracijų tikimybės? Kokios konfigūracijų tikimybės atskiriamų kauliukų (arba kauliuką metant penkis kartus) atveju?

Sprendimas. Štai lentelė, kurioje surašyti visi rezultatai.

5-to skaidiniai		Konfigūracijos		p	P
5	1	(i^5)	6	$6/252$	$6/7776$
4+1	5	(i^4j)	30	$30/252$	$150/7776$
3+2	10	(i^3j^2)	30	$30/252$	$300/7776$
3+1+1	20	(i^3jk)	60	$60/252$	$1220/7776$
2+2+1	30	(i^2j^2k)	60	$60/252$	$1800/7776$
2+1+1+1	60	(i^2jkl)	60	$60/252$	$3600/7776$
1+1+1+1+1	120	$(ijklm)$	6	$6/252$	$720/7776$

Pirmame stulpelyje užrašyti skaičiaus 5 skaidiniai, o trečiame – kiekvieną skaidinį atitinkanti konfigūracija. Antrame stulpelyje užrašyti konfigūracijų skaičiai, o ketvirtame – neatskiriamų kauliukų atsivertusių akučių konfigūracijų skaičius. Skaičių, esantį antrame stulpelyje, sudauginę su skaičiumi, esančiu toje pat eilutėje ir ketvirtame sulpelyje, gauname atskiriamų kauliukų atsivertusių akučių konfigūracijos, esančios toje pat eilutėje, kaip ir dauginamieji skaičiai, skaičių. Neatskiriamų kauliukų visų galimų atsivertusių akučių konfigūracijų skaičius yra lygus derinių su pasikartojimais iš 6 po 5 skaičiui $\binom{10}{5} = 252$. Tuo tarpu atskiriamų kauliukų visų galimų atsivertusių akučių konfigūracijų skaičius yra lygus gretinių su pasikartojimais iš 6 po 5 skaičiui $6^5 = 7776$. Penktame ir šeštame stulpeliuose surašytos atitinkamai neatskiriamų ir atskiriamų kauliukų atsivertusių akučių konfigūracijų tikimybės.

3.6.6 pavyzdys. Metame 6 neatskiriamus kauliukus. Kokios gali būti atsivertusių akučių konfigūracijos ir kokios tų konfigūracijų tikimybės? Kokios konfigūracijų tikimybės atskiriamų kauliukų (arba kauliuką metant šešis kartus) atveju?

Sprendimas. Štai lentelė, kurioje surašyti visi rezultatai.

6-to skaidiniai		Konfigū-racijos		p	P
6	1	(i^6)	6	$6/462$	$6/46656$
5+1	6	(i^5j)	30	$30/462$	$180/46656$
4+2	15	(i^4j^2)	30	$30/462$	$450/46656$
4+1+1	30	(i^4jk)	60	$60/462$	$1800/46656$
3+3	20	(i^3j^3)	15	$15/462$	$300/46656$
3+2+1	60	(i^3j^2k)	120	$120/462$	$7200/46656$
3+1+1+1	120	(i^3jkl)	60	$60/462$	$7200/46656$
2+2+2	90	$(1^2j^2k^2)$	20	$20/462$	$1800/46656$
2+2+1+1	180	(1^2j^2kl)	90	$90/462$	$16200/46656$
2+1+1+1+1	360	(1^2jklm)	30	$30/462$	$10800/46656$
1+1+1+1+1+1	720	$(1jklmn)$	1	$1/462$	$720/46656$

Pirmame stulpelyje užrašyti skaičiaus 5 skaidiniai, o trečiame – kiekvieną skaidinį atitinkanti konfigūracija. Antrame stulpelyje užrašyti konfigūracijų skaičiai, o ketvirtame – neatskiriamų kauliukų atsivertusių akučių konfigūracijų skaičius. Skaičių, esantį antrame stulpelyje, sudauginę su skaičiumi, esančiu toje pat eilutėje ir ketvirtame stulpelyje, gauname atskiriamų kauliukų atsivertusių akučių konfigūracijos, esančios toje pat eilutėje, kaip ir dauginamieji skaičiai, skaičių. Neatskiriamų kauliukų visų galimų atsivertusių akučių konfigūracijų skaičius yra lygus derinių su pasikartojimais iš 6 po 6 skaičiui $\binom{11}{5} = 462$. Tuo tarpu atskiriamų kauliukų visų galimų atsivertusių akučių konfigūracijų skaičius yra lygus gretinių su pasikartojimais iš 6 po 6 skaičiui $6^6 = 46656$. Penktame ir šeštame stulpeliuose surašytos atitinkamai neatskiriamų ir atskiriamų kauliukų atsivertusių akučių konfigūracijų tikimybės.

3.6.7 pavyzdys. Tarkime, kad kiekviename iš šešių langelių, panašiai kaip elektros ar kituose skaitikliuose, gali pasirodyti vienas iš septynių simbolių su tikimybe 1/7. Uždavinį formuluojame taip pat, kaip ir žaidimo kauliuko atveju, lyg mėtytume kauliuką, turintį 7 sieneles, kuriuose surašyti skaičiai nuo 1 iki 7, o kiekvienam skaičiui „atsiversti“ tikimybė lygi 1/7. „Metame“ 6 tokius neatskiriamus kauliukus (t. y. nagrinėjamos simbolių konfigūracijos, kai simbolių tvarka nesvarbi). Kokios gali būti „atsivertusių akučių“ konfigūracijos ir kokios tų konfigūracijų tikimybės? Kokios konfigūracijų tikimybės „atskiriamų“ kauliukų (t. y. kai simbolių tvarka svarbi)?

Sprendimas. Štai lentelė, kurioje surašyti visi rezultatai.

6-to skaidiniai		Konfigūracijos		p	P
6	1	(i^6)	7	$7/924$	$7/117649$
5+1	6	(i^5j)	42	$42/924$	$252/117649$
4+2	15	(i^4j^2)	42	$42/924$	$630/117649$
4+1+1	30	(i^4jk)	105	$105/924$	$3150/117649$
3+3	20	(i^3j^3)	21	$21/924$	$420/117649$
3+2+1	60	(i^3j^2k)	210	$210/924$	$1260/117649$
3+1+1+1	120	(i^3jkl)	140	$140/924$	$16800/117649$
2+2+2	90	$(1^2j^2k^2)$	35	$35/924$	$3150/117649$
2+2+1+1	180	(1^2j^2kl)	210	$210/924$	$37800/117649$
2+1+1+1+1	360	(1^2jklm)	105	$105/924$	$37800/117649$
1+1+1+1+1+1	720	$(1jklmn)$	7	$7/924$	$5040/117649$

Pirmame stulpelyje užrašyti skaičiaus 6 skaidiniai, o trečiame – kiekvieną skaidinį atitinkanti konfigūracija. Antrame stulpelyje užrašyti konfigūracijų skaičiai, o ketvirtame – galinčių pasirodyti simbolių, kurių tvarka nesvarbi, konfigūracijų skaičius. Skaičių, esantį antrame stulpelyje, sudauginę su skaičiumi, esančiu toje pat eilutėje ir ketvirtame stulpelyje, gauname simbolių, kurių tvarka svarbi, konfigūracijos, esančios toje pat eilutėje, kaip ir dauginamieji skaičiai, skaičių. Visų simbolių, kai tvarka nesvarbi, galimų konfigūracijų skaičius yra lygus derinių su pasikartojimais iš 7 po 6 skaičiui $\binom{12}{6} = 924$. Tuo tarpu simbolių, kai tvarka svarbi, visų galimų konfigūracijų skaičius yra lygus gretinių su pasikartojimais iš 7 po 6 skaičiui $7^6 = 117649$. Penktame ir šeštame stulpeliuose surašytos atitinkamai simbolių konfigūracijų, kai tvarka nesvarbi ir kai tvarka svarbi, simbolių tikimybės.

3.6.8 uždavinys. Sudarykite tokias lenteles, kai metami septyni kauliukai. Sudarykite lentelę lyg mėtytumėte septynius kauliukus, turinčius septynias sieneles, kuriose surašyti skaičiai nuo 1 iki 7, ir bet kuris iš septynių skaičių gali atsiversti su tikimybe 1/7.

3.7 Skaičios elementariųjų įvykių aibės

3.7.1 pavyzdys. Dabar aptarsime atvejį, kai elementariųjų įvykių erdvė

$$\Omega = \{\omega_j \mid 1 \leqslant j < \infty\}$$

yra skaiti. Priskyrę kiekvienam elementariajam įvykiui ω_j skaičių

$$P(\omega_j) = p_j \geqslant 0, \quad 1 \leqslant j < \infty,$$

taip, kad tų visų skaičių suma būtų lygi vienam, t. y.,

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1,$$

galime korektiškai apibrėžti kiekvieno aibės Ω poaibio A, kaip įvykio, tikimybę

$$P(A) = \sum_{j,\ \omega_j \in A} p_j.$$

Šis kiekvieno aibės Ω poaibio A tikimybės apibrėžimas korektiškas, nes eilutės

$$\sum_{j,\ \omega_j \in A} p_j$$

konverguoja koks bebūtų skaičios aibės Ω poaibis.

Vadinasi, šiuo atveju egzistuoja funkcija

$$P : \mathcal{F}(\Omega) \to [0,\ 1],$$

apibrėžta galingiausioje aibės Ω visų poaibių σ-algebroje, tenkinanti tikimybinio mato aksiomas. Tuo tarpu, kaip minėjome anksčiau, apibrėžti tikimybinį matą

$$P : \mathcal{F}(\Omega) \to [0,\ 1]$$

galingiausioje σ-algebroje $\mathcal{F}(\Omega)$, kai, pavyzdžiui,

$$\Omega = [0,\ 1] \ \text{ arba } \ \Omega = \mathbb{R},$$

tenkinantį aksiomas, neįmanoma. Šios σ-algebros per daug galingos. Tarę, kad toks matas egzistuoja, gautume prieštarą.

Kai elementariųjų įvykių erdvė yra, pavyzdžiui, realiųjų skaičių aibė, tenka apsiriboti σ-algebra, generuota atvirų intervalų. Tokia σ-algebra yra vadinama *Borelio aibių σ-algebra* ir žymima $\mathfrak{B}$. Pirmiausia galima apibrėžti suderintai tikimybes intervalams, o po to išplėsti tikimybinį matą į Borelio aibes.

Skaičiosios aibės Ω atveju situaciją pailiustruosime konkrečiais pavyzdžiais.

3.7.2 pavyzdys. Tegul elementariųjų įvykių erdvė yra

$$\Omega = \{\omega_j \mid 1 \leqslant j < \infty\}.$$

Apibrėžkime elementariųjų įvykių tikimybes taip:

$$P(\omega_j) = \frac{C}{j(j+1)}, \quad 1 \leqslant j < \infty.$$

Kam lygi konstantos reikšmė, kad taip apibrėžtas matas būtų tikimybinis?

Sprendimas. Konstantos reikšmę rasime iš sąlygos

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(\omega_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C}{j(j+1)} = 1.$$

Užrašome eilutės

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$$

dalinę sumą

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Kadangi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

tai $C = 1$.

3.7.3 pavyzdys. Tegul elementariųjų įvykių erdvė yra

$$\Omega = \{\omega_j \mid 1 \leqslant j < \infty\}.$$

Apibrėžkime elementariųjų įvykių tikimybes taip:

$$P(\omega_j) = \frac{C}{j(j+1)(j+2)}, \quad 1 \leqslant j < \infty.$$

Kam lygi konstantos reikšmė, kad taip apibrėžtas matas būtų tikimybinis?

Sprendimas. Konstantos reikšmę, kaip ir anksčiau, rasime iš sąlygos

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(\omega_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C}{j(j+1)(j+2)} = 1.$$

Užrašome eilutės

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)(j+2)}$$

dalinę sumą

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)(j+2)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{j} - \frac{2}{j+1} + \frac{1}{j+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Kadangi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)(j+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{4},$$

tai $C = 4$.

Pasiūlysime skaitytojui išspręsti panašų pavyzdį bendru atveju.

3.7.4 pavyzdys. Tegul elementariųjų įvykių erdvė yra

$$\Omega = \{\omega_j \mid 1 \leqslant j < \infty\}.$$

Apibrėžkime elementariųjų įvykių tikimybes taip:

$$P(\omega_j) = \frac{C}{j(j+1)\dots(j+p)}, \quad 1 \leqslant j < \infty.$$

Kam lygi konstantos reikšmė, kad taip apibrėžtas matas būtų tikimybinis?

Iš pirmo žvilgsnio pasibaisėtinose formulėse iš tikrųjų slypi gražūs dėsningumai, kuriuos pastebėjus kyla pasigėrėjimo jausmas. Išspręskite šį pavyzdį ir patirkite šį jausmą.

3.7.5 pavyzdys. Tegul elementariųjų įvykių erdvė yra

$$\Omega = \{\omega_j \mid 1 \leqslant j < \infty\}.$$

Apibrėžkime elementariųjų įvykių tikimybes taip:

$$P(\omega_j) = \frac{C}{j(j+s)\dots(j+s\cdot p)}, \quad 1 \leqslant j < \infty.$$

Kam lygi konstantos reikšmė, kad taip apibrėžtas matas būtų tikimybinis?

Sprendimas. Konstantos reikšmę, kaip ir anksčiau, rasime iš sąlygos

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(\omega_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C}{j(j+s)\dots(j+s\cdot p)} = 1.$$

Prieš apskaičiuojant eilutės

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+s)\dots(j+s\cdot p)}$$

reikšmę, įrodysime teiginį.

3.7.6 teiginys.

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{j+s\cdot k}\, \mathrm{C}_p^k = \frac{s^p \cdot p!}{j(j+s)\dots(j+s\cdot p)}.$$

Teiginio įrodymas. Teiginį įrodysime matematinės indukcijos metodu. Indukciją atliksime pagal skaičių p.

Pirmas žingsnis. Kai $p=1$, teiginys teisingas. Iš tikrųjų,

$$\frac{1}{j} - \frac{1}{j+s} = \frac{s}{j\cdot(j+s)}.$$

Antras žingsnis. Tarkime, kad lygybė

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{j+s\cdot k}\, \mathrm{C}_m^k = \frac{s^m \cdot m!}{j(j+s)\dots(j+s\cdot m)}$$

teisinga visiems m, kai $1 \leqslant m < p$.

Trečias žingsnis. Įrodome, kad lygybė

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{j+s\cdot k}\, \mathrm{C}_p^k = \frac{s^p \cdot p!}{j(j+s)\dots(j+s\cdot p)}$$

teisinga ir atveju $m=p$. Užrašytą lygybę pertvarkome.

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{j+s\cdot k}\, \mathrm{C}_p^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{j+s\cdot k}(\mathrm{C}_{p-1}^k + \mathrm{C}_{p-1}^{k-1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^k}{j+s\cdot k}\, \mathrm{C}_{p-1}^k - \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{j+s\cdot k}\, \mathrm{C}_{p-1}^{k-1}) =$$
$$= \frac{s^{p-1}\cdot(p-1)!}{j(j+s)\dots(j+s\cdot(p-1))} - \frac{s^{p-1}\cdot(p-1)!}{(j+s)\dots(j+s\cdot p)} =$$
$$= \frac{s^{p-1}\cdot(p-1)!(j+s\cdot p-j)}{j(j+s)\dots(j+s\cdot p)} = \frac{s^p\cdot p!}{j(j+s)\dots(j+s\cdot p)}.$$

Teiginys įrodytas.

Dabar apskaičiuosime eilutės

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+s)\dots(j+s\cdot p)}$$

reikšmę. Pirmiausia pastebime, kad ši eilutė konverguoja. Nagrinėjamą eilutę pertvarkome:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+s)\dots(j+s\cdot p)} = \frac{1}{s^p\cdot p!}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{j+s\cdot k}\,\mathrm{C}_p^k =$$

$$= \frac{1}{s^p\cdot p!}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{(-1)^k}{j+s\cdot k}\,\mathrm{C}_{p-1}^k - \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^{k-1}}{j+s\cdot k}\,\mathrm{C}_{p-1}^{k-1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{s^p\cdot p!}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{s^{p-1}(p-1)!}{j(j+s)\dots(j+s\cdot(p-1))} - \frac{s^{p-1}(p-1)!}{(j+s)\dots(j+s\cdot p)}\Big) =$$

$$= \frac{1}{s\cdot p}\Big(A - \Big(A - \sum_{j=1}^{s}\frac{1}{j(j+s)\dots(j+s\cdot(p-1))}\Big)\Big) =$$

$$= \frac{1}{s\cdot p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{j(j+s)\dots(j+s\cdot(p-1))},$$

čia

$$A = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(j+s)\dots(j+s\cdot(p-1))}.$$

Ieškoma konstanta

$$C = \left(\frac{1}{s\cdot p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{j(j+s)\dots(j+s\cdot(p-1))}\right)^{-1}.$$

3.8 Uždaviniai ir jų sprendimai

3.8.1 pavyzdys. Iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 išrenkamas skaičius, o po to iš likusių šešių išrenkamas kitas. Tarkime, kad visi 42 atvejai vienodai galimi. Raskite tikimybę, kad

1) pirmą kartą;
2) antrą kartą;
3) abejais kartais

išrinkti nelyginiai skaičiai.

Sprendimas.

1) Tikimybė pirmą kartą išrinkti nelyginį skaičių lygi $4/7$.
2) Antrą kartą išrinkus nelyginį skaičių, palankių atvejų yra 24: pirmą kartą išrinkę lyginį, o antrą kartą nelyginį, gauname 12 atvejų, o pirmą kartą išrinkę nelyginį ir antrą kartą išrinkę nelyginį, gauname dar 12 atvejų. Taigi tikimybė lygi $24/42 = 4/7$.
3) Tuo tarpu tikimybė išrinkti abejus kartus nelyginius skaičius lygi $12/42 = 2/7$.

3.8.2 pavyzdys. Keliais būdais galima išdėstyti skirtingos spalvos bokštus šachmatų lentoje taip, kad jie vienas kitą galėtų nukirsti? Keliais būdais galima išdėstyti bokštus lentoje $n \times n$ taip, kad jie vienas kitą galėtų nukirsti?

Sprendimas. Pastačius bokštą langelyje, jis kontroliuoja linijas, kurios kertasi tame langelyje. Vadinasi, kitą bokštą galima statyti kuriame nors tų linijų langeliuose, išskyrus užimtą langelį. Laisvų langelių yra $2 \cdot 8 - 2 = 14$. Kadangi pirmą bokštą galima pastatyti 64 langeliuose, tai skirtingos spalvos bokštus šachmatų lentoje iš viso galima išdėstyti $64 \cdot 14$ būdais. Jei lentoje yra n^2 langelių, tai skirtingos spalvos bokštus toje lentoje iš viso galima išdėstyti $n^2(2n-2)$ būdais.

3.8.3 pavyzdys. Morzės abėcėlės raidės sudaromos iš taškų ir brūkšnelių. Kiek raidžių galima sudaryti iš tokių simbolių, kurių skaičius neviršija 10?

Sprendimas. Vienaraidžių žodžių yra du. Dviraidžių žodžių galima sudaryti keturis ir t. t. Taigi iš viso galima sudaryti

$$2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = 2 \cdot (2^{10} - 1)$$

žodžių.

3.8.4 pavyzdys. Domino kauliukai žymimi dviem skaičiais. Kadangi kauliukai simetriški, skaičių tvarka nesvarbi. Kiek galima sudaryti skirtingų domino kauliukų naudojant skaičius nuo $1,\ 2,\dots,n$?

Sprendimas. Iš nurodytų skaičių galima sudaryti tiek domino kauliukų, kiek yra skaičių porų $(i,\ j)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. Tai deriniai su pasikartojinais. Jų yra

$$\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3.8.5 uždavinys. Skaičiai $1,\ 2,\dots,n$ atsitiktinai išdėstomi. Raskite tikimybę, kad skaičiai

1) 1, 2;

2) 1, 2, ir 3

išdėstyti vienas šalia kito ir didėjančia tvarka.

Atsakymas.

1) $\dfrac{(n-2)!(n-1)}{n!} = \dfrac{1}{n}$;

2) $\dfrac{(n-3)!(n-2)}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)n}$.

3.8.6 pavyzdys. Raskite tikimybę, kad tarp r atsitiktinai išrinktų skaitmenų nėra dviejų lygių.

Sprendimas. Skaitmenų yra dešimt. Palankių atvejų yra lygus gretinių iš dešimties po r skaičiui $(10)_r$. r skaitmenų iš dešimtiems galima parinkti 10^r būdais. Ieškoma tikimybė lygi $\frac{(10)_r}{10^r}$.

3.8.7 pavyzdys. n žmonių, tarp jų A ir B, atsitiktinai išsidėstę į eilutę. Raskite tikimybę, kad tarp A ir B gali stovėti r žmonių. Įrodykite, kad jei visi žmonės stovėtų ratu, tai tikimybė nepriklauso nuo r, ir raskite tą tikimybę.

Sprendimas. Tarp A ir B r žmonių iš $n-2$ galima išdėstyti $(n-2)_r$ būdais, čia $(n-2)_r$ – gretinių iš $n-2$ po r skaičius. Likusius $n-r-2$ žmones galima išdėstyti $(n-r-2)!$ būdais. Be to, A ir B gali užimti $(n-r-1)$ pozicijų nuo vieno eilės krašto iki kito. Sudauginę, gauname skaičių

$$(n-2)_r(n-r-2)!(n-r-1).$$

Sukeitę A ir B vietomis, dar gauname tiek pat atvejų. Vadinasi, palankių atvejų yra $2(n-2)_r(n-r-1)!$. Ieškoma tikimybė yra lygi

$$\frac{2(n-2)_r(n-r-1)!}{n!}=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

Jei žmonės sustoję ratu, palankių atvejų gauname $2(n-2)_r(n-r-2)!n$. Šiuo atveju ieškoma tikimybė yra lygi

$$\frac{2(n-2)_r(n-r-2)!n}{n!}=\frac{2}{n-1}.$$

3.8.8 pavyzdys. Raskite tikimybę, kad, metant tris kauliukus du kartus, rezultatai sutaps, jei

1) kauliukai skiriasi vienas nuo kito tik spalva;

2) kauliukai neatskiriami.

Sprendimas.

1) Jei kauliukai skiriasi spalva, tai tikimybė, kad, metus tris kauliukus du kartus, vienodos spalvos kauliukų akučių skaičius sutaps, yra lygi $6/36=1/6$. Kadangi kauliuko atsivertusių akučių skaičius nepriklauso nuo kitų kauliukų atsivertusių akučių skaičiaus, tai atsakymas į pirmą klausimą yra

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}.$$

2) Atsakymas į antrą klausimą šiek tiek sudėtingesnis. Nesunku suvokti, kad iš viso galimų atvejų yra 6^6. Būtina suskaičiuoti palankius atvejus. Tarkime, pirmuoju ir antruoju trijų neatskiriamų kauliukų metimu sutapo baigtys aaa. Tokių atvejų yra 6. Tegul sutapo baigtys aab, čia akučių skaičiai gali būti išsidėstę

ir kita tvarka. Tokių atvejų yra $30 \cdot 9$, nes rinkinių aab yra 30 ir, be to, kiekviename trejete aab akučių skaičių galimos 3 pozicijos: aab, aba, baa. Pagaliau gali sutapti baigtys abc. Tokių atvejų yra $20 \cdot 36$, nes rinkinių abc yra 20 ir, be to, kiekviename trejete abc akučių skaičių galimos pozicijos yra 6. Palankių atvejų yra $6 + 270 + 720 = 996$. Ieškoma tikimybė yra lygi

$$\frac{996}{6^6} = \frac{83}{3888}.$$

3.8.9 pavyzdys. Iš n objektų aibės išrenkama r ojektų. Raskite tikimybę, kad tarp išrinktų objektų nėra nė vieno iš pažymėtų m objektų, jei

1) išrinkimas atliekamas be sugrąžinimo;

1) išrinkimas atliekamas sugrąžinant išrinktą objektą.

Sprendimas. Visų galimų atvejų yra $(n)_r$. Palankių atvejų yra $(n-m)_r$. Ieškoma tikimybė pirmuoju atveju lygi

$$\frac{(n-m)_r}{(n)_r}.$$

Antruoju atveju tikimybė lygi

$$\frac{(n-m)^r}{(n)^r}.$$

3.8.10 pavyzdys. Raskite tikimybę, kad visų 12 žmonių gimimo dienos yra metų skirtingų mėnesių (tariant, kad kiekviena gimimo diena su vienoda tikimybe yra kurio nors mėnesio diena).

Sprendimas. Palankių įvykių skaičius yra $12!$, o visų galimų atvejų skaičius yra lygus 12^{12}. Ieškoma tikimybė lygi $12!/12^{12}$.

3.8.11 pavyzdys. Raskite tikimybę, kad tarp 30 žmonių iš 12 metų mėnesių yra 6 mėnesiai, kuriuose yra gimę po 2 žmones ir 6 mėnesiai, kuriuose yra gimę po 3 žmones.

Sprendimas. Atvejų, kad du žmonės iš 30 yra gimę kuriame nors mėnesyje, skaičius yra lygus $\binom{30}{2}\binom{12}{1}$. Atvejų, kad du žmonės iš likusių 28 yra gimę kuriame nors mėnesyje, išskyrus jau užimtą mėnesį, skaičius yra lygus $\binom{28}{2}\binom{11}{1}$. Tęsdami taip toliau, gauname, kad atvejų po du žmones iš 30 gimusių kuriuose nors 6 skirtinguose mėnesiuose, skaičius yra lygus $\frac{\binom{30}{2}\cdots\binom{20}{2}(12)_6}{6!}$ (dalijame iš 6!, nes mėnesių tvarka nesvarbi). Panašiai gauname, kad atvejų po tris žmones iš 18 gimusių kuriuose nors 6 likusiuose skirtinguose mėnesiuose skaičius yra lygus $\frac{\binom{18}{3}\cdots\binom{3}{3}(6)_6}{6!}$. Iš viso galimų atvejų skaičius yra lygus 12^{30}. Ieškoma tikimybė lygi

$$\frac{\binom{30}{2}\cdots\binom{20}{2}\binom{12}{6}\binom{18}{3}\cdots\binom{3}{3}}{12^{30}} = \frac{30!}{2^6\cdot 3^6\cdot 12^{30}}\binom{12}{6}.$$

3.8.12 pavyzdys. $2n$ berniukų ir $2n$ mergaičių grupė perskirta į dvi lygias dalis. Raskite tikimybę, kad berniukų ir mergaičių skaičiai kiekvienoje dalyje būtų lygūs.

Sprendimas. Kad berniukų ir mergaičių skaičius kiekvienoje dalyje būtų lygus, reikia parinkti n berniukų iš $2n$ berniukų ir n mergaičių iš $2n$ mergaičių. Tai galima padaryti $\binom{2n}{n}$ būdais parenkant berniukus ir tokiu pat skaičiumi būdų parenkant mergaites. Vadinasi, $2n$ berniukų ir $2n$ mergaičių grupę perskirti į dvi lygias dalis taip, kad berniukų ir mergaičių skaičius kiekvienoje dalyje būtų lygus, galima $\binom{2n}{n}^2$ būdais. Tuo tarpu $4n$ žmonių grupę perskirti į dvi lygias dalis iš viso galima $\binom{4n}{2n}$ būdais. Ieškoma tikimybė yra lygi

$$\frac{\binom{2n}{n}^2}{\binom{4n}{2n}}.$$

Tai yra vėl hipergeometrinės tikimybės pavyzdys.

3.8.13 pavyzdys. Koks skiriamų baigčių skaičius kartu išmetus r_1 kauliukų ir r_2 monetų?

Sprendimas. Išmetus r_1 kauliukų, baigčių skaičius yra lygus 6^{r_1}. Išmetus r_2 monetų, baigčių skaičius yra lygus r_2+1, pavyzdžiui, herbo atsivertimų nuo 0 iki r_2 skaičius. Kartu išmetus r_1 kauliukų ir r_2 monetų baigčių skaičius yra lygus

$$6^{r_1}(r_2+1).$$

3.8.14 pavyzdys. Keliais būdais galima išdėlioti r_1 baltų, r_2 juodų ir r_3 žalių rutulių?

Sprendimas. Tai kėlinių su pasikartojimais skaičius.

Atsakymas. $\dfrac{(r_1 + r_2 + r_3)!}{r_1!r_2!r_3!}$.

3.8.15 pavyzdys. Raskite tikimybę, kad, metus monetą penkis kartus, bent tris kartus iš eilės iškris skaičius.

Sprendimas. Palankių atvejų 8, iš viso galimų – 32.

Atsakymas. $\dfrac{1}{4}$.

3.8.16 pavyzdys. Raskite tikimybę, kad, metus monetą dešimt kartų, bent penkis kartus iš eilės iškris skaičius.

Sprendimas. Suskaičiuosime palankių atvejų skaičių. Pirmiausia yra 6 atvejai, kai iš eilės tik penkis kartus iškrenta skaičiai. Yra 25 atvejai, kai iš eilės penkis kartus iškrenta skaičiai, o iškritusių skaičių yra 6. Yra 40 atvejų, kai iš eilės penkis kartus iškrenta skaičiai, o iškritusių skaičių yra 7. Yra 30 atvejų, kai iš eilės penkis kartus iškrenta skaičiai, o iškritusių skaičių yra 8. Yra 10 atvejų, kai iš eilės penkis kartus iškrenta skaičiai, o iškritusių skaičių yra 9. Yra 1 atvejis, kai iš eilės dešimt kartų iškrenta skaičiai. Palankių atvejų yra 112, iš viso galimų atvejų – 2^{10}. Ieškoma tikimybė lygi

$$\frac{112}{2^{10}} = \frac{7}{64}.$$

3.8.17 pavyzdys. Raskite tikimybę, kad, metus penkis kauliukus, iš atsivertusių bent trijų kauliukų akučių skaičiai bus lygūs.

Sprendimas. Šį uždavinį galima išspręsti keliais būdais. Spręsime išrašę visus elementariuosius įvykius ir jų tikimybes. Sutarkime, pavyzdžiui, $(i^{(4)},\ j)$ žymėti elementaraus įvykio tipą, kai atsivertusių keturių kauliukų akučių skaičius lygus i, o vieno – akučių skaičius lygus j. Tokio tipo elementarių įvykių yra 30 ir šį faktą sutarkime užrašyti $30(i^{(4)},\ j)$. Visų elementarių įvykių erdvę galime užrašyti taip:

$$\Omega = \big\{6(i^{(5)}),\ 30(i^{(4)},\ j),\ 30(i^{(3)},\ j^{(2)}),\ 60(i^{(3)},\ j,\ k),$$

$$60(i^{(2)},\ j^{(2)},\ k),\ 60(i^{(2)},\ j,\ k,\ l),\ 6(i,\ j,\ k,\ l,\ m)\big\}.$$

Išrašykime įvairių tipų elementarių įvykių tikimybes:

$$p(i^{(5)}) = \frac{1}{6^5},\ p(i^{(4)},\ j) = \frac{5}{6^5},\ p(i^{(3)},\ j^{(2)}) = \frac{10}{6^5},\ p(i^{(3)},\ j,\ k) = \frac{20}{6^5},$$

$$p(i^{(2)},\ j^{(2)}) = \frac{30}{6^5},\ p(i^{(2)},\ j,\ k,\ l) = \frac{60}{6^5},\ p(i,\ j,\ k,\ l,\ m) = \frac{120}{6^5}.$$

Įvykis, kurio tikimybės ieškome, atrodo taip:

$$A = 6(i^{(5)}) + 30(i^{(4)},\ j) + 30(i^{(3)},\ j^{(2)}) + 60(i^{(3)},\ j,\ k).$$

Šio įvykio tikimybė yra lygi

$$P(A) = 6 \cdot \frac{1}{6^5} + 30 \cdot \frac{5}{6^5} + 30 \cdot \frac{10}{6^5} + 60 \cdot \frac{20}{6^5} = \frac{23}{108}.$$

3.8.18 pavyzdys. Du kauliukai metami r kartų. Raskite tikimybę, kad kiekviena iš šešių kombinacijų

$$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6),$$

įvyks bent vieną sykį.

Sprendimas. Pažymėkime raide A_j įvykį, kai metus du kauliukus r kartų, pasirodė bent vieną kartą $(j,\ j)$ akučių skaičiai. Įvykio $\bar{A}_j$, priešingo įvykiui A_j, tikimybė lygi $(\frac{35}{36})^r$. Įvykių

$$\bar{A}_{j_1} \cdot \bar{A}_{j_2},\ \bar{A}_{j_1} \cdot \bar{A}_{j_2} \cdot \bar{A}_{j_3},\ \bar{A}_{j_1} \cdot \bar{A}_{j_2} \cdot \bar{A}_{j_3} \cdot \bar{A}_{j_4},$$

$$\bar{A}_{j_1} \cdot \bar{A}_{j_2} \cdot \bar{A}_{j_3} \cdot \bar{A}_{j_4} \cdot \bar{A}_{j_5},\ \bar{A}_{j_1} \cdot \bar{A}_{j_2} \cdot \bar{A}_{j_3} \cdot \bar{A}_{j_4} \cdot \bar{A}_{j_5} \cdot \bar{A}_{j_6},$$

čia visi įvykių indeksai skirtingi, tikimybės yra lygios

$$\left(\frac{34}{36}\right)^r,\ \left(\frac{33}{36}\right)^r,\ \left(\frac{32}{36}\right)^r,\ \left(\frac{31}{36}\right)^r,\ \left(\frac{30}{36}\right)^r.$$

Pasinaudoję įvykių sumos tikimybės formule, apskaičiuokime įvykio

$$\bar{A} = \bar{A}_{j_1} + \bar{A}_{j_2} + \bar{A}_{j_3} + \bar{A}_{j_4} + \bar{A}_{j_5} + \bar{A}_{j_6}$$

tikimybę:

$$P(\bar{A}) = \binom{6}{1}\left(\frac{35}{36}\right)^r - \binom{6}{2}\left(\frac{34}{36}\right)^r + \binom{6}{3}\left(\frac{33}{36}\right)^r - \\ - \binom{6}{4}\left(\frac{32}{36}\right)^r + \binom{6}{5}\left(\frac{31}{36}\right)^r - \binom{6}{6}\left(\frac{30}{36}\right)^r.$$

Ieškoma tikimybė yra lygi $1 - P(\bar{A})$.

3.8.19 pavyzdys. Iš n objektų aibės išrenkama r objektų. Raskite tikimybę, kad tarp išrinkų objektų yra kiekvienas iš pažymėtų m objektų, jei išrinkimas atliekamas be sugrąžinimo.

Sprendimas. Palankių atvejų skaičius yra $\binom{n-m}{r-m}$, o visų galimų atvejų skaičius yra $\binom{n}{r}$. Ieškoma tikimybė yra lygi

$$\frac{\binom{n-m}{r-m}}{\binom{n}{r}}.$$

3.8.20 pavyzdys. Automobilių stovėjimo aikštelėje yra 16 viena šalia kitos automobiliams pastatyti vietų. Raskite tikimybę, kad šioje aikštelėje atsitiktinai pastačius 10 automobilių, liks 6 laisvos vietos, išsidėsčiusios viena šalia kitos.

Sprendimas. Visų galimų atvejų skaičius yra $\binom{16}{10}$. Palankių atvejų skaičius yra 11. Ieškoma tikimybė yra lygi

$$\frac{11}{\binom{16}{10}}.$$

3.8.21 pavyzdys. Kiek reikia atsitiktinai parinkti skaitmenų, kad tarp jų būtų 7 su tikimybe nemažesne $0,9$?

Sprendimas. Tikimybė, kad atsitiktinai parinktas skaitmuo nelygus kuriam nors vienam fiksuotam, lygi $0,9$. Tikimybė, kad atsitiktinai parinkti r skaitmenų, nelygių kuriam nors vienam fiksuotam, lygi $0,9^r$. Norėdami atsakyti į uždavinio klausimą, sudarome nelygybę:

$$1 - 0,9^r \geqslant 0,9.$$

Ši nelygybė ekvivalenti nelygybei $0,9^r \leqslant 0,1$ arba $r \geqslant 22$.

3.8.22 pavyzdys. Kokia sąlyginė tikimybė pataikyti į taikinį iš dešimties šūvių bent du kartus, jei vieną kartą buvo pataikyta ir jei pataikymo tikimybė lygi $0,2$?

Sprendimas. Tegul A – įvykis pataikyti į taikinį bent du kartus, B – įvykis pataikyti į taikinį bent vieną kartą. Tuomet ieškoma tikimybė yra lygi

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1 - 0,8^{10} - 10 \cdot 0,2 \cdot 0,8^9}{1 - 0,8^{10}}.$$

3.8.23 pavyzdys. Kokia tikimybė, kad šešių žmonių gimimo dienos yra dviejų kalendorinių mėnesių dienos?

Sprendimas. $\binom{12}{2}(2^6 - 2) \cdot 12^{-6}$.

3.8.24 pavyzdys. Metami 6 kauliukai.

Kokia tikimybė atsiversti:

1) Bent vienai akutei?

2) Tiksliai vienai akutei?

3) Tiksliai dviem po vieną akutėms?

Sprendimas.

1) Tegul A įvykis, kad, metus 6 kauliukus, nė vieno kauliuko neatsivertė viena akutė. Įvykio A tikimybė lygi $(\frac{5}{6})^6$. Priešingas įvykis $\bar{A}$ įvykiui A, kaip tik tas įvykis, apie kurio tikimybę pirmiausia ir klausiama. Taigi
$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6.$$

2)
$$\binom{6}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

3)
$$\binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

3.8.25 pavyzdys. Loterijos „Šeši skaičiai iš 49“ dalyvis pirmąjį bilietą užpildė skaičiais

$$5,\ 9,\ 16,\ 25,\ 34,\ 42,$$

o antrąjį – skaičiais

$$5,\ 9,\ 16,\ 29,\ 37,\ 48.$$

Kokia tikimybė, kad dalyvio vienas ir kitas bilietas tiksliai turės tris bendrus skaičius su paskelbto išlošiamojo skaičių šešetuko skaičiais?

Sprendimas. Visų galimų atvejų skaičius yra lygus $\binom{49}{6}$. Suskaičiuosime palankius atvejus. Pirmiausia pažmykėkime A_j įvykį, kad tarp pirmo bilieto atspėtų trijų skaičių ir antro bilieto atspėtų trijų skaičių yra j bendrų skaičių, $0 \leqslant j \leqslant 3$. Įvykio A_0 atveju išlošiamas skaičių šešetukas yra vienintelis 25, 29, 34, 37, 42, 48. Įvykio A_1 atveju išlošiamų skaičių šešetukų yra $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 40$. Įvykio A_2 atveju išlošiamų skaičių šešetukų yra $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \binom{40}{2}$. Įvykio A_3 atveju išlošiamų skaičių šešetukų yra $\binom{40}{3}$. Palankių atvejų yra

$$1 + 27 \cdot 40 + 27 \cdot 20 \cdot 39 + 20 \cdot 13 \cdot 38 = 32021.$$

Ieškoma tikimybė yra lygi

$$\frac{32021 \cdot 6!}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{2911}{1271256}.$$

3.8.26 uždavinys. Iš n objektų aibės išrenkama r ojektų. Raskite tikimybę, kad tarp išrinktų objektų yra kiekvienas iš pažymėtų m objektų, jei išrinkimas atliekamas su sugrąžinimu.

Atsakymas.

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^r.$$

4 Diskretieji atsitiktiniai dydžiai ir jų skaitinės charakteristikos

4.1 Diskretieji atsitiktiniai dydžiai

Tegul $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ P)$ yra tikimybinė erdvė. Primename, kad Ω – elementariųjų įvykių erdvė, $\mathfrak{F}$ – įvykių algebra (tiksliau – σ-algebra, t. y. aibės Ω poaibių šeima, tenkinanti anksčiau suformuluotas aksiomas), P – tikimybinis matas, t. y. funkcija

$$P : \mathfrak{F} \to [0,\ 1],$$

tenkinanti savybes, kurios anksčiau buvo suformuluotos. Paprastumo dėlei nagrinėsime atvejį, kai Ω yra baigtinė arba skaiti aibė, o $\mathfrak{F}(\Omega)$ – aibės Ω visų poaibių aibė.

4.1.1 apibrėžimas. Funkcija

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$$

yra vadinama *atsitiktiniu dydžiu.*

4.1.2 apibrėžimas (Atsitiktinio dydžio apibrėžimas bendru atveju). Tegul $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ P)$ tikimybinė erdvė. Funkcija

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$$

yra vadinama *atsitiktiniu dydžiu*, jei realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ Borelio σ-algebros $\mathfrak{B}$ kiekvieno elemento $X \in \mathfrak{B}$ pirmavaizdis $\xi^{-1}(X)$ yra σ-algebros $\mathfrak{F}$ elementas. Matematine kalba pastarąją sąlygą formaliai galime užrašyti:

$$X \in \mathfrak{B} \Rightarrow \xi^{-1}(X) \in \mathfrak{F}.$$

4.1.3 pastaba. Atsitiktinio dydžio apibrėžime, kai Ω yra baigtinė arba skaiti aibė, sąlyga, kuri formuluojama atsitiktinio dydžio apibrėžime bendruoju atveju, nereikalinga, nes ji automatiškai tenkinama.

4.1.4 apibrėžimas (Diskrečiojo atsitiktinio dydžio apibrėžimas). Tegul $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ P)$ tikimybinė erdvė. Atsitiktinis dydis

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$$

yra vadinamas *diskrečiuoju*, jei jo galimų reikšmių aibė yra baigtinė arba skaiti.

4.1.5 pastaba. Jei $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ P)$ tikimybinės erdvės aibė Ω yra baigtinė arba skaiti aibė, tai atsitiktinis dydis

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$$

yra diskretus.

Panagrinėkime pavyzdžius.

4.1.6 pavyzdys. Mėtant žaidimo kauliuką, atsivertusių akučių skaičius yra atsitiktinis dydis, sutapatinamas su pačiu atsitiktiniu elementariuoju įvykiu. Funkcija

$$\xi : \{\omega_j \mid 1 \leqslant j \leqslant 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ \xi(\omega_j) = j,$$

yra atsitiktinis dydis.

4.1.7 pavyzdys. Vilniaus gyventojų darbo užmokestis yra atsitiktinis dydis. Tiesa, gali kilti klausimas, o kas gi yra Vilniaus gyventojas? Sutarkime laikyti Vilniaus gyventoju tą žmogų, kuris šiuo momentu gyvena Vilniuje. Savaime suprantama, kad bandydami sutarti, ką laikyti Vilniaus gyventoju, įsiveliame į labai sudėtingą klausimą, nes Vilniaus gyventojų skaičius yra laiko atsitiktinis dydis. Žmonės gimsta, žmonės miršta, žmonės išvyksta iš Vilniaus, atvyksta į Vilnių atsitiktiniais momentais ir t. t. Net klausimas, kur baigiasi Vilniaus miesto riba, labai sudėtingas.

4.1.8 pavyzdys. Lietuvos gyventojų darbo užmokestis yra atsitiktinis dydis.

4.1.9 pavyzdys. Lietuvos gyventojų piniginės pajamos yra atsitiktinis dydis.

4.1.10 pavyzdys. Tegul 100 žmonių darbo užmokestis toks: 98 bedarbiai neturi jokio uždarbio, o du, dirbantys energetikos sistemoje, gauna po šimtą tūkstančių litų. Šių žmonių piniginės pajamos yra atsitiktinis dydis.

4.1.11 pavyzdys. Tegul 100 žmonių uždirba po du tūkstančius litų. Tai atsitiktinio dydžio – konstantos pavyzdys.

4.2 Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių skirstiniai, pasiskirstymo funkcija

4.2.1 apibrėžimas. Tegul $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ P)$ yra tikimybinė erdvė, o

$$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$$

– atsitiktinis dydis. Funkcija

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leqslant x\})$$

yra vadinama atsitiktinio dydžio ξ *pasiskirstymo funkcija.* Tikimybinis matas

$$P_\xi : \mathfrak{B} \to [0,1],\ P_\xi(X) = P\Big(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in X\}\Big),$$

apibrėžtas realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ Borelio poaibių aibėje $\mathfrak{B}$, yra vadinamas *atsitiktinio dydžio ξ skirstiniu.*

Su tikimybinės erdvės $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ P)$ atsitiktiniu dydžiu ξ susiejama tikimybinė erdvė $(\mathbb{R},\ \mathfrak{B},\ P_\xi)$.

Išrašysime pasisikirstymo funkcijos savybes.

Iš pasiskirstymo funkcijos apibrėžimo matome, kad

- pasiskirstymo funkcija $F(x)$ nemažėjanti, t. y., jei $x_1 < x_2$, tai

$$F(x_1) \leqslant F(x_2);$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1;$

- pasiskirstymo funkcija $F(x)$ yra tolydi iš dešinės, t. y.

$$\lim_{y \to x+0} F(y) = F(x).$$

Panagrinėkime pavyzdžius.

4.2.2 pavyzdys (Ir vėl Bernulio schema). Bernulio schemoje atsitiktiniam įvykiui A, kuris gali įvykti su tikimybe p, priskirkime 1, o įvykiui $\bar{A}$, kuris gali įvykti su tikimybe q, priskirkime 0, čia $p+q=1$. Taip apibrėžta funkcija

$$\xi : \{A, \bar{A}\} \to \{0, 1\}$$

yra atsitiktinis dydis. n bandymų serijai pagal Bernulio schemą atitinka atsitiktinis dydis $\mathbf{S_n}$, kuris yra lygus sumai, gautai sudėjus n atsitiktinių dydžių ξ:

$$\mathbf{S_n} = \underbrace{\xi + \xi + \ldots + \xi}_{n}.$$

Atsitiktinio dydžio $\mathbf{S_n}$ reikšmės yra pasiskirsčiusios pagal binominį dėsnį:

$$P(\mathbf{S_n} = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Atsitiktinio dydžio $\mathbf{S_n}$ pasiskirstymo funkcija yra

$$F_{\mathbf{S_n}}(x) = \sum_{k<x} b(k; n, p) = \sum_{k<x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Suma pagal tuščią indeksų aibę yra lygi 0.

4.2.3 pavyzdys. Puasono skirstinys. Yra sakoma, kad atsitiktinio dydžio ξ reikšmės pasiskirsčiusios pagal Puasono dėsnį, jei ξ įgyja neneigiamas sveikąsias reikšmes su tikimybėmis

$$P(\xi = j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}, \; j \geqslant 0.$$

Skaičius λ yra vadinamas *Puasono skirstinio (dėsnio) parametru.*

4.2.4 pavyzdys. Atsitiktinių dydžių

$$\xi(k, m; r, n), \quad 0 \leqslant k \leqslant m, r \leqslant n,$$

iš n rutulių, tarp kurių yra m baltų ir $n-m$ žalių, ištraukus r rutulių, aptikti tarp ištrauktų k baltų rutulių, hipergeometrinės tikimybės

$$p(k, m; r, n) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}} = \frac{r!(n-r)!m!(n-m)!}{n!k!(m-k)!(r-k)!(n-m-r+k)!}$$

yra šių atsitiktinių dydžių skirstiniai.

4.2.5 pavyzdys. Tegul 100 žmonių darbo užmokestis toks: 60 žmonių nieko neuždirba, 20 žmonių uždirba po 1000 litų, 15 žmonių uždirba po 1500 litų, 3 žmonės po 10000 litų, o du žmonės po 50000 litų. Štai šio atsiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{jei} \quad x < 0, \\ 0,6 & \text{jei} \quad 0 \leqslant x < 1000, \\ 0,8, & \text{jei} \quad 1000 \leqslant x < 1500, \\ 0,95, & \text{jei} \quad 1500 \leqslant x < 10000, \\ 0,98, & \text{jei} \quad 10000 \leqslant x < 50000, \\ 1, & \text{jei} \quad 50000 \leqslant x. \end{cases}$$

4.2.6 pavyzdys. Žaidimo kauliuko akučių skaičiaus pasiskirstymo funkcija:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{jei} \quad x < 1, \\ \frac{1}{6} & \text{jei} \quad 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{2}{6}, & \text{jei} \quad 2 \leqslant x < 3, \\ \frac{3}{6}, & \text{jei} \quad 3 \leqslant x < 4, \\ \frac{4}{6}, & \text{jei} \quad 4 \leqslant x < 5, \\ \frac{5}{6}, & \text{jei} \quad 5 \leqslant x < 6, \\ 1, & \text{jei} \quad 6 \leqslant x. \end{cases}$$

4.2.7 pavyzdys. Vilniaus ir Lietuvos gyventojų darbo užmokesčio (atlyginimo) dydžių pasiskirstymo funkcijos neskelbiamos. Vyriausybės tarnautojai, darbuotojai, (valdininkai), kaip bebūtų keista net ir ekonomistai įpratę kalbėti apie vidutinį darbo užmokestį. Bet, kaip greitai įsitikinsime, uždarbių vidurkiai ir apskritai kitų atsitiktinių dydžių vidurkiai absoliučiai nieko neatspindi, jei tik atsitiktinis dydis nėra pastovus, konstanta. Asmenys, aiškinantys ekonominę būseną dydžių vidurkiais, arba nesupranta to, arba įpratę apgaudinėti žmones.

4.3 Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkiai

Tegul atsitiktinis dydis ξ įgyja baigtinį skaičių (arba skaičią aibę) reikšmių a_j su tikimybėmis p_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, (arba $1 \leqslant j < \infty$).

4.3.1 apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio ξ vidurkis $E\xi$ yra skaičius, apibrėžiamas lygybe

$$E\xi = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot p_j \text{ (arba } E\xi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot p_j).$$

4.3.2 pastaba. Jei atsitiktinis dydis ξ įgyja skaičią aibę reikšmių a_j su tikimybėmis p_j, $1 \leqslant j < \infty$, tai gali neegzistuoti baigtinis vidurkis.

Pavyzdžiui, tegul $a_j = j$, $p_j = \dfrac{6}{\pi^2}\dfrac{1}{j^2}$, $1 \leqslant j < \infty$. Tuomet

$$E\xi = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot p_j = \frac{6}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \frac{1}{j^2} = \frac{6}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}.$$

Pastaroji eilutė, kaip žinome, diverguoja.

Panagrinėsime pavyzdžius.

4.3.3 pavyzdys. Suskaičiuosime atsitiktinio dydžio ξ, kurio reikšmės pasisikirsčiusios pagal Puasono dėsnį su parametru λ, vidurkį.

$$E\xi = \sum_{j=0}^{\infty} j\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda\, e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda.$$

4.3.4 pavyzdys. Suskaičiuosime atsitiktinio dydžio $\mathbf{S_n}$, kurio reikšmės yra pasiskirsčiusios pagal binominį dėsnį:

$$P(\mathbf{S_n} = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

vidurkį.

$$E\mathbf{S_n} = \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = n \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} p^j q^{n-j} =$$
$$= np \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} p^{j-1} q^{n-j} = np \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m q^{n-m-1} = n\,p.$$

Šį rezultatą galima gauti ir kitaip. Atsitiktinis dydis $\mathbf{S_n}$ yra lygus sumai, gautai sudėjus n atsitiktinių dydžių ξ:

$$\mathbf{S_n} = \underbrace{\xi + \xi + \ldots + \xi}_{n},$$

čia atsitiktinis dydis ξ įgyja reikšmę 1 su tikimybe p ir 0 su tikimybe q. Atsitiktinio dydžio ξ vidurkis $E\xi = p$. Galime pasinaudoti formule: $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$. Vadinasi,

$$E\mathbf{S_n} = E(\underbrace{\xi + \xi + \ldots + \xi}_{n}) = \underbrace{E\xi + E\xi + \ldots + E\xi}_{n} = n\,p.$$

4.3.5 pavyzdys. Tegul 100 žmonių darbo užmokestis toks: 98 žmonių neturi jokio uždarbio, o du gauna po šimtą tūkstančių litų. Šio atsitiktinio dydžio vidurkis yra lygus $0 \cdot 0,98 + 10^5 \cdot 0,02 = 2000$. Neblogas vidurkis. Modeliuokime šią situaciją Lietuvos žmonėms. Tarkime, kad Lietuvoje gyvena trys milijonai žmonių. Kaip matote, jei du (2) procentai gauna po 100000 litų, o 98 procentai absoliučiai nieko neuždirba, tai vidutinis uždarbis lygus 2000 litų. Įsivaizduokite, kad du milijonai devyni šimtai keruriasdešimt tūkstančių (2940000) nieko neuždirba, o šešiasdešimt tūkstančių (60000) uždirba po šimtą tūkstančių (100000), tai vidurkis lygus 2000. Ką atspindi vidurkis šiuo atveju? Ar šis vidurkis atspindi faktą, kad 98 nuošimčiai gyventojų absoliučiai nieko neuždirba, neturi jokių pajamų?

4.3.6 pavyzdys. Tegul visi gyventojai uždirba po 2000 litų. Šiuo atveju vidurkis yra lygus 2000.

4.3.7 pavyzdys. Tegul 50 nuošimčių gyventojų uždirba po 1000 litų, likusieji – po 3000 litų. Šiuo atveju ir vėl vidurkis yra lygus 2000.

4.3.8 pavyzdys. Tegul 100 žmonių darbo užmokestis toks: 60 žmonių nieko neuždirba, 20 žmonių uždirba po 1000 litų, 15 žmonių uždirba po 1500 litų, 3 žmonės po 10000 litų, o du žmonės po 50000 litų. Šio atsitiktinio dydžio ξ vidurkis yra lygus

$$E\xi = 0\cdot 0,6 + 1000\cdot 0,2 + 1500\cdot 0,15 + 10000\cdot 0,03 + 50000\cdot 0,02 = 1725.$$

Dabar galime šį vidurkį pagerinti. Tegul tie 60 žmonių, kurie nieko neuždirbo, tarkime dabar uždirba po 600 litų, o kiti po tiek pat, kaip ir anksčiau nurodyta. Kaip pasikeis vidurkis? Prie anksčiau gauto vidurkio pridėkime $600\cdot 0,6 = 360$. Dabar vidurkis lygus $1752+360 = 2112$. Ką atspindi vidurkiai visais šiais atvejais?

Matome, kad visiškai skirtingos situacijos, o vidurkiai artimi. Lengva pateikti įvairiausias situacijas su lygiais vidurkiais. Skaitytojas lengvai gali sugalvoti tokias situacijas.

4.3.9 pastaba. Pateiksime šiek tiek istorijos faktų. Iki 1935 metų Sovietų Sąjungoje buvo aukštos kvalifikacijos statistikos specialistų. Bet statistikos mokslo ekonomikos būklės tyrimai rodė labai blogus socializmo statybos rezultatus. Tai Stalinui, generaliniam Komunistų partijos sekretoriui, ir kitiems „gerovės komunizmo statytojams“ buvo visiškai nepriimtina. Tarybinė propaganda bet kuria kaina buvo nusiteikusi pasaulį įtikinti, pasauliui įrodyti socializmo privalumus ir pergalę prieš kitas sistemas. Melas buvo tarybinio gyvenimo norma. Stalino įsakymu visi kvalifikuoti statistikos specialistai buvo fiziškai sunaikinti – sušaudyti arba mirė kalėjimuose, lageriuose. Vietoje tikro statistikos mokslo taikymo, tiriant ekonominę šalies būklę, buvo pradėta skelbti pasiekimų vidurkius. Jie jokios realios padėties, kaip matėte, neatspindi, neatspindėjo ir negali atspindėti. Vidurkių kalba buvo galima pagrįsti bet kurį melą, o norinčių išsiaiškinti tiesą ar abejojančių socializmo pergalėmis laukė kalėjimas, lageriai, dažniausiai ir mirtis. Sovietų Sąjungoje vyko tokie procesai, kurių sveiku protu neįmanoma suvokti. Buvo nepaprastai pavojinga ir mokslininkams, dirbusiems kitose srityse. Pavyzdžiui, įžymus rusų genetikas Nikolajus Vavilovas įsitikino amerikiečio Morgano chromosomų ir paveldėjimo teorijos teisingumu ir viešai tai pripažino. Tuo laiku Morgano chromosomų ir paveldėjimo teorija buvo nepaprastas įvykis moksle. Tai pirmas žingsnis į dabar gerai žinomas genetikų ištirtas genomų struktūras. Komunizmo statytojams buvo nepriimtina paveldėjimo teorija, ji nesiderino, tiesiog prieštaravo jų doktrinai perauklėti ir sukurti paklusnius komunizmo statytojus. Nikolajus Vavilovas buvo suimtas ir vėliau nušautas kalėjime, tuo tarpu jo brolis fizikas Sergejus Vavilovas buvo Mokslų akademijos prezidentu. Keista, ar ne? Niekas ir dabar nežino, kur ilsisi Nikolajaus Vavilovo, įžymaus rusų mokslininko, palaikai. O jo tiek praktinės veiklos, tiek biologijos ir genetikos moksle nuopelnai Rusijai neįkainojami.

Panašių sveiku protu nesuvokiamų atvejų buvo be galo daug. Kaip minėjome, komunizmo ideologai buvo numatę perauklėti ir išauginti naujus komunizmo statytojus. Tie, kurie nepasiduodavo perauklėjamui, būdavo fiziškai naikinami. Fiziškai naikindavo ir perauklėtus. Stalino valdymo metais išžudytų buvo ne viena dešimtis milijonų.

Lietuva buvo okupuota 50 metų ir pagaliau 1990 metais išsivadavo iš okupacijos. Reikia pripažinti – įvyko stebuklas. Bet stalininio auklėjimo ir idėjų rezultatai akivaizdūs. Lietuvos valdžios žmonės Stalino laikų statistikos atsisakyti niekaip negali. Nesugeba ar nenori? Iš valdžios vyrų ir moterų lūpų nuolat galite išgirsti apie vidutinius įvairių pasiekimų rezultatus, uždarbius, gyrimąsi vidutiniais pasiekimais ir t. t. Matyt, labai patogi Stalino laikų statistika! Jei būtų skelbiami duomenys, skaičiai, atspindintys realią padėtį Lietuvoje, Lietuva atrodytų pasibaisėtinai skurdi, didžiausių turtinių kontrastų, atsilikusi šalis. Mokslas visiškai nevertinamas. Tik apie mokslą, žinių visuomenę įsigudrinta gražiai pakalbėti. Lietuvą valdančiųjų mąstymas pasibaisėtinas. Nors Stalinas ir seniai miręs, bet jo idėjos gyvos ne tik dabartinėje Rusijoje, bet ir Lietuvoje! Stalino laikais Rusija labai išplėtė teritoriją, okupuodama kaimynines šalis. Be to, Sovietų Sąjunga buvo tiek prisigaminusi visokių ginklų, o ypač branduolinių galvučių, kad pasaulis ne juokais prisibijojo, kad kilus branduoliniam karui, gali būti sunaikintas. Didelė dalis dabartinio Rusijos jaunimo žavisi Stalino valdymo metodais ir pasiekimais, žavisi tuo, kad visas pasaulis bijojęs Sovietų Sąjungos, kuri potencialiai galėjo jį sunaikinti. Tuo tarpu Lietuvos valdantiesiems parankus, patogus Stalino statistikos mokslas.

4.3.10 pavyzdys. Iš trisdešimties skaičių $(1, 2, \ldots, 29, 30)$ be sugrąžinimo atsitiktinai išrenkami dešimt skaičių. Raskite išrinktųjų dešimties skaičių sumos, kaip atsitiktinio dydžio, vidurkį.

Sprendimas. Labai įdomus uždavinys. Tiesiogiai skaičiuojant pagal atsitiktinio dydžio vidurkio apibrėžimą šis uždavinys praktiškai neįveikiamas. Kadangi visi dešimties skaičių išrinkimai yra lygiaverčiai, tai tikimybė atsitiktinai išrinkti kurį nors dešimties skaičių rinkinį yra lygi $1/\binom{30}{10}$. Vadinasi, reikėtų kiekvieno dešimties skaičių rinkinio skaičius sudėti, po to visus $\binom{30}{10}$ rezultatų sudėti ir gautą rezultatą padalinti iš $\binom{30}{10}$. Bet sprendžiant šį uždavinį galima pasinaudoti formule $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$.

Tegul ξ atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes $1, 2, \ldots, 29, 30$, kiekvieną iš jų su tikimybe $1/30$. Akivaizdu, kad

$$E\xi = \frac{1+2+\ldots+30}{30} = \frac{31\cdot 30}{2\cdot 30} = \frac{31}{2}.$$

Tegul $\eta = \underbrace{\xi + \xi + \ldots + \xi}_{10}$. η – atsitiktinis dydis, kurio matematinį vidurkį mes ir norime suskaičiuoti. Akivaizdu,

$$E\eta = E(\underbrace{\xi + \xi + \ldots + \xi}_{10}) = 10\cdot\frac{31}{2} = 155.$$

4.3.11 pavyzdys. n rutuliukų atsitiktinai išdėliojama į N dėžių. Tegul skaičius $\eta_0(n, N)$ lygus tuščių dėžių skaičiui. Raskite atsitiktinio dydžio $\xi_0(n, N)$ vidurkį $E\eta_0(n, N)$.

Sprendimas. Kaip ir praeitame uždavinyje pasinaudosime formule $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$. Tegul ξ_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, – atsitiktinis dydis, įgyja reikšmę 1, jei j-oji dėžė tuščia ir lygi 0 kitais atvejais. Tuomet akivaizdu, kad

$$\eta_0(n,\,N) = \sum_{j=1}^{N} \xi_j.$$

Lieka suskaičiuoti $E\xi_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Tikimybė, kad į j-ąją dėžę nepateks nė vienas iš n rutuliukų, yra lygi $\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$.

Taigi

$$E\xi_j = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n, \ \ 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Gauname, kad

$$E\eta_0(n,\,N) = E\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{N} E\xi_j = N \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

4.3.12 pavyzdys. n rutuliukų atsitiktinai išdėliojama į N dėžes. Tegul skaičius $\eta_r(n,\,N)$ lygus dėžių, į kurias pateko tiksliai r rutuliukų, skaičiui. Raskite atsitiktinio dydžio $\xi_0(n,\,N)$ vidurkį $E\eta_r(n,\,N)$.

Sprendimas. Ir vėl pasinaudosime formule

$$E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2.$$

Tegul ξ_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, – atsitiktinis dydis, įgyja reikšmę 1, jei į j-ąją dėžę pateko tiksliai r rutuliukų ir lygi 0 kitais atvejais. Suskaičiuosime $E\xi_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Tikimybė (binominis skirstinys), kad į j-ąją dėžę pateko tiksliai r rutuliukų, yra lygi

$$\binom{N}{r}\frac{1}{N^r}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-r} = \frac{\binom{N}{r}(N-1)^r}{N^n}.$$

Ieškomas atsitiktinio dydžio $\xi_0(n,\,N)$ vidurkis $E\eta_r(n,\,N)$ yra lygus

$$E\eta_r(n,\,N) = E\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{N} E\xi_j = \frac{\binom{N}{r}(N-1)^r}{N^{n-1}}.$$

4.3.13 pavyzdys. Tegul dėžėje yra n baltų rutulių ir m – žalių. Atsitiktinai ištraukiame be grąžinimo r rutulių. Tegul tarp ištrauktų rutulių yra s baltų rutulių. Tarp ištrauktų rutulių baltų rutulių skaičius yra atsitiktinis dydis ξ. Raskite šio atsitiktinio dydžio vidurkį.

Sprendimas. Panašiai, kaip ir ankstesniuose uždaviniuose, galima įrodyti, kad

$$E\xi = r \cdot \frac{n}{n+m}.$$

4.4 Diskrečiųjų atsitiktinių dydžių dispersijos

4.4.1 apibrėžimas. Tegul atsitiktinis dydis ξ įgyja baigtinį skaičių reikšmių a_j su tikimybėmis p_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, $E\xi$ – šio atsitiktinio dydžio vidurkis. Skaičius

$$D\xi = \sum_{j=1}^{n} (a_j - E\xi)^2 \cdot p_j,$$

yra vadinamas *atsitiktinio dydžio dispersija.*

Atsitiktinio dydžio dispersiją galima interpretuoti kaip matą, rodantį atsitiktinio dydžio reikšmių išsibarstymą apie atsitiktinio dydžio vidurkį. Kuo mažesnė atsitiktinio dydžio dispersija, tuo mažiau atsitiktinio dydžio reikšmės išsibarsčiusios, t. y. kaupiasi apie vidurkį. Jei atsitiktinio dydžio dispersija lygi nuliui, tai atsitiktinis dydis įgyja pastovią reikšmę.

4.4.2 pavyzdys. Suskaičiuosime atsitiktinio dydžio ξ, kurio reikšmės pasiskirsčiusios pagal Puasono dėsnį su parametru λ, dispersiją

$$D\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \big(j-\lambda\big)^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \big(\lambda^2 - 2j\lambda + j^2\big) \frac{\lambda^j}{j!} =$$

$$= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 e^{\lambda} - 2\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \right) =$$

$$= e^{-\lambda} \left(-\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} + \lambda e^{\lambda} \right) = \lambda,$$

nes

$$\lambda \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} = \lambda^2 e^{\lambda}.$$

4.5 Dvimačiai diskretieji atsitiktiniai dydžiai

4.5.1 apibrėžimas. Diskrečių atsitiktinių dydžių pora (ξ, η), kurios įgyjamų reikšmių tikimybės apibrėžtos lygybėmis

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{i,j}, \;\; 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n,$$

(čia vienas iš m, n arba abu gali būti ir ∞), yra vadinama *dvimačiu diskrečiuoju atsitiktiniu dydžiu.* Funkcija

$$F_{(\xi,\eta)}(x, y) = \sum_{\substack{i, j \\ x_i < x, \\ y_j < y}} p_{i,j}$$

yra vadinama *dvimačio diskrečiojo atsitiktinio dydžio* (ξ, η) *pasiskirstymo funkcija.*

4.5.2 apibrėžimas. Jei dvimačio diskrečiojo atsitiktinio dydžio (ξ, η) įgyjamų reikšmių tikimybės apibrėžtos lygybėmis

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{i,j}, \;\; 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n,$$

tai sumos

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}, \;\; 1 \leqslant i \leqslant m,$$

yra lygios atsitiktinio dydžio ξ įgyjamų reikšmių tikimybėms, t. y.

$$P_\xi(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}, \; 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Panašiai,

$$P_\eta(\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{i,j}, \; 1 \leqslant i \leqslant n,$$

yra lygios atsitiktinio dydžio η įgyjamų reikšmių tikimybėms. Tokiu būdu gautos atsitiktinių dydžių ξ ir η įgyjamų reikšmių x_i ir y_j tikimybės $P_\xi(\xi = x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ir $P_\eta(\eta = y_j)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ yra vadinamos *kraštutinėmis (marginaliosiomis) tikimybėmis.*

4.5.3 apibrėžimas. Dvimačio diskrečiojo atsitiktinio dydžio (ξ, η), kurio įgyjamų reikšmių tikimybės yra lygios

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j), \;\; 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n,$$

komponentės, t. y. atsitiktiniai dydžiai ξ ir η, yra vadinami *nepriklausomais*, jei

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_\xi(\xi = x_i)\, p_\eta(\eta = y_j), \; 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Kitaip tariant, atsitiktiniai dydžiai ξ ir η yra nepriklausomi, jei jų įgyjamų reikšmių kraštutinių (marginaliųjų) tikimybių sandauga lygi dvimačio diskrečiojo atsitiktinio dydžio (ξ, η) įgyjamų reikšmių tikimybėms.

4.6 Dvimačių diskrečiųjų atsitiktinių dydžių vidurkiai ir kovariacijos matrica

Panašiai, kaip ir vienmačio diskretaus atsitiktinio dydžio atveju, dvimačio diskretaus atsitiktinio dydžio (ξ, η) atveju galima apibrėžti vidurkį ir dispersijos analogą – kovariacijos matricą.

4.6.1 apibrėžimas. Tegul dvimačio diskretaus atsitiktinio dydžio $\zeta = (\xi, \eta)$ įgyjamų reikšmių tikimybės apibrėžtos lygybėmis

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{i,j}, \;\; 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Tuomet šio dvimačio diskretaus atsitiktinio dydžio ζ vidurkis apibrėžiamas lygybe

$$E\zeta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, p_{i,j}.$$

Dvimačio diskretaus atsitiktinio dydžio ζ komponenčių ξ ir η vidurkiai apibrėžiami lygybėmis

$$E\xi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i\, p_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} x_i\, p_\xi(\xi = i),$$

$$E\eta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_j\, p_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} y_j\, p_\eta(\eta = j).$$

4.6.2 apibrėžimas. Tegul dvimačio diskretaus atsitiktinio dydžio $\eta = (\xi_1, \xi_2)$, įgyjamų reikšmių tikimybės apibrėžtos lygybėmis

$$P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = p_{i,j}, \;\; 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Vidurkiai

$$\sigma_{i\,j} = E(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j), \;\; 1 \leqslant i, j \leqslant 2,$$

vadinami *atsitiktinių dydžių* ξ_i *ir* ξ_j *kovariacijomis.* Jos surašomos į matricą

$$Cov(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{1\,1} & \sigma_{1\,2} \\ \sigma_{2\,1} & \sigma_{2\,2} \end{pmatrix},$$

kuri yra vadinama *dvimačio diskretaus atsitiktinio dydžio* $\eta = (\xi_1, \xi_2)$ *kovariacijos matrica.* Skaičius

$$\varrho = \frac{\sigma_{1\,2}}{\sqrt{\sigma_{1\,1}}\sqrt{\sigma_{2\,2}}}$$

yra vadinamas *atsitiktinių dydžių* ξ_1 *ir* ξ_2 *koreliacijos koeficientu.*

4.6.3 pastaba. Akivaizdu, kad $\sigma_{1\,1} = D\xi_1$, – atsitiktinio dydžio ξ_1 dispersija, o $\sigma_{2\,2} = D\xi_2$, – atsitiktinio dydžio ξ_2 dispersija. Be to, visas šias dvimačių atsitiktinių dydžių sąvokas galima apibendrinti ir n-mačio atsitiktinio dydžio $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ atveju.

4.6.4 teiginys. Jei atsitiktiniai dydžiai ξ ir η yra nepriklausomi, tai

$$E(\xi\, \eta) = E(\xi)\, E(\eta).$$

Įrodymas. Turime, kad

$$E(\xi\,\eta) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, p_{i,\,j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j\, p_\xi(\xi = i)\, p_\eta(\eta = j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i\, p_\xi(\xi = i) \sum_{j=1}^{n} y_j\, p_\eta(\eta = j) = E\xi \cdot E\eta.$$

4.6.5 pavyzdys. Tegul dvimačio diskretaus atsitiktinio dydžio $\eta = (\xi_1,\, \xi_2)$ įgyjamų reikšmių tikimybės apibrėžtos lentelėje:

		ξ_1			
		-2	-1	2	3
	1	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$
ξ_2	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	0
	3	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Tuomet diskretaus atsitiktinio dydžio η komponentės ξ_1 įgyjamų reikšmių tikimybės nurodytos lentelėje:

ξ_1	-2	-1	2	3
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$

Komponentės ξ_2 įgyjamų reikšmių tikimybės nurodytos lentelėje:

ξ_2	1	2	3
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Kadangi

$$P(\xi_1 = -2,\, \xi_2 = 1) = \frac{1}{12} \neq P_{\xi_1}(\xi_1 = -2) \cdot P_{\xi_2}(\xi_1 = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6},$$

tai atsitiktiniai dydžai ξ_1 ir ξ_2 yra priklausomi.

Pasinaudoję duotais duomenimis, užrašome rezultatus, kurie suskaičiuoti žemiau.

$$E\eta = -\frac{7}{24},$$

$$E\xi_1 = \frac{13}{6},$$

$$E\xi_2 = \frac{13}{6}.$$

Kadangi

$$E\eta \neq E\xi_1 \cdot E\xi_2 = \frac{13}{6},$$

tai ir vėl matome, kad atsitiktiniai dydžiai ξ_1 ir ξ_2 yra priklausomi.

$$\sigma_{1\,1} = \frac{1991}{576},$$

$$\sigma_{1\,2} = \sigma_{2\,1} = \frac{7}{864},$$

$$\sigma_{2\,2} = \frac{17}{36}.$$

Čia pateikti skaičiavimai:

$$E\eta = (-2) \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{24} + 3 \cdot \frac{1}{24} + (-4) \cdot \frac{1}{6} + \\ + (-2) \cdot \frac{1}{3} + (-3) \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{7}{24},$$

$$E\xi_1 = (-2) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{24} + 3 \cdot \frac{5}{24} = -\frac{7}{24},$$

$$E\xi_2 = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{6}.$$

$$\sigma_{1\,1} = E\left(\xi_1 + \frac{7}{24}\right)^2 =$$
$$= \left(-2 + \frac{7}{24}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(-1 + \frac{7}{24}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} +$$
$$+ \left(2 + \frac{7}{24}\right)^2 \cdot \frac{1}{24} + \left(3 + \frac{7}{24}\right)^2 \cdot \frac{5}{24} = \frac{1991}{576}.$$

$$\sigma_{1\,2} = \sigma_{2\,1} = E\left(\xi_1 + \frac{7}{24}\right)\left(\xi_2 - \frac{13}{6}\right) =$$
$$= \left(-2 + \frac{7}{24}\right)\left(1 - \frac{13}{6}\right) \cdot \frac{1}{12} + \left(2 + \frac{7}{24}\right)\left(1 - \frac{13}{6}\right) \cdot \frac{1}{24} +$$
$$+ \left(3 + \frac{7}{24}\right)\left(1 - \frac{13}{6}\right) \cdot \frac{1}{24} + \left(-2 + \frac{7}{24}\right)\left(2 - \frac{13}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} +$$
$$+ \left(-1 + \frac{7}{24}\right)\left(2 - \frac{13}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(-1 + \frac{7}{24}\right)\left(3 - \frac{13}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} +$$
$$+ \left(3 + \frac{7}{24}\right)\left(3 - \frac{13}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{864}.$$
$$\sigma_{2\,2} = E\left(\xi_2 - \frac{13}{6}\right)^2 =$$
$$= \left(1 - \frac{13}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{13}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(3 - \frac{13}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{36}.$$

4.6.6 pavyzdys. Dvimačio atsitiktinio dydžio $(\eta_1,\ \eta_2)$ pasiskirstymas apibrėžiamas lygybėmis

$$P(\eta_1 \cdot \eta_2 = 0) = 1,\ P(\eta_j = 1) = P(\eta_j = -1) = \frac{1}{4}, j = 1, 2.$$

Raskite $E\eta_1$, $E\eta_2$, $D\eta_1$, $D\eta_2$, $Cov(\eta_1,\ \eta_2)$.

Sprendimas. Atsižvelgę į duomenis, galime sudaryti atsitiktinių dydžių η_1 ir η_2 įgyjamų reikšmių tikimybių lentelę:

			η_1		
		-1	0	1	
	-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
η_2	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

Akivaizdu, kad

$$E\eta_1 = E\eta_2 = 0,\ D\eta_1 = D\eta_2 = \frac{1}{2},\ Cov(\eta_1,\, \eta_2) = 0.$$

4.6.7 pastaba. Iš pateikto pavyzdžio matome, kad priklausomų atsitiktinių dydžių kovariacija gali būti lygi ir nuliui.

4.7 Žaidimo kauliukas ir simetrija

Simetrija. Šis žodis kiekvienam sukelia vienokias ar kitokias asociacijas. Pavyzdžiui, kaip malonu balutėje stebėti dangaus, debesėlių atspindžius. Žiūrėdami į balutę matote žydrą bedugnę, kurios gilumoje plaukioja debesėliai. Kokie puikūs bažnyčių statiniai. Jų grožis kelia pasigėrėjimą. Snaigės žavi savo grožiu. Simetriją galima įžvelgti ir daugelyje augalų. Veidrodinės simetrijos lengviausiai įžvelgiamos. Yra žymiai sudėtingesnės sandaros simetrijos. Ispanijoje Granados mieste Alhambra rūmų vienos salės (*Sala de Camas*) lubos, sienos, grindys išpuoštos XIV šimtmetyje marokiečių (ist. maurų) menininkų nuostabiomis mozaikomis. Olandų dailininko M. C. Ešero (Maurits Cornelis Escher, 1898–1972) nepakartojami kūriniai persunkti simetrija. Marokiečių dailininkų mozaikos Ešerui padarė nemažą įtaką. Šios simetrijos gana sudėtingos. Taip pat sudėtingas simetrijas galima pamatyti kilimų, juostų raštuose. Įžymus matematikas Hermanas Veilis (Hermann Weyl) simetrijai paskyrė savo nuostabią knygelę „Symmetry“, kurioje daug įvairiausių simetrijos pasireiškimų iliustracijų įvairiausiose srityse. Be to, autorius atlieka simetrijų įvairovės gilią matematinę analizę, pagrįstą grupių teorija. Simetrijos aprašomos matematikos srities, – grupių teorijos, – kalba. Simetrijų tema neišsemiama. Pavyzdžiui, fizikoje simetrijos ir tvermės dėsniai neatsiejami. Fizikai, remdamiesi simetrijomis, numatė naujų elementariųjų dalelių egzistavimą, kurios tik vėliau buvo aptiktos. Dažnai simetrijos užslėptos ir jas aptikus pasiseka išspręsti ypač sudėtingus uždavinius.

Mes pasinaudosime gana paprasta simetrija, įgalinančia atsakyti į kai kuriuos klausimus, susijusius su žaidimo kauliuku – kubeliu. Pats žaidimo kauliukas yra simetriškas. Todėl metus kauliuką vieną kartą atsiversti bet kuriam akučių skaičiui nuo 1 iki 6 priskiriama tikimybė lygi $\frac{1}{6}$. Įsivaizduokime situaciją, pavyzdžiui, kad metėte žaidimo kauliuką 115 kartų. Atsivertusių akučių skaičių suma gali būti nuo 115 iki 690. Jei jūsų paklaustų, kurio iš įvykių

$$A = \{\text{atsivertusių akučių skaičių suma lygi } 161\}$$

ar

$$B = \{\text{atsivertusių akučių skaičių suma lygi } 644\}$$

tikimybė didesnė? Ką jūs atsakytumėte? Mes kalbame apie teorinę tikimybę. Remdamiesi klasikinės tikimybės apibrėžimu, jūs turėtumėte tiek pirmo paminėto įvykio A atveju, tiek ir antrojo įvykio B atveju suskaičiuoti palankius elementarius įvykius, sudarančius paminėtus įvykius A ir B. Žinodami šiuos elementariųjų įvykių, sudarančius įvykį A ir B, skaičius, jūs atsakytumėte į suformuluotą klausimą. Atkaklus žmogus gal ir pabandytų suskaičiuoti elementarius įvykius, sudarančius įvykius A ir B. Bet, jei, pavyzdžiui, pasakytume, kad metėte žaidimo kauliuką 8153571 kartų. Tuomet mažiausia atsivertusių akučių skaičių suma gali būti 8153571, o didžiausia – 48921426. Dabar, pavyzdžiui, paklauskime, kurio iš įvykių

$$A = \{\text{atsivertusių akučių skaičių suma lygi } 9895796\}$$

ar

$$B = \{\text{atsivertusių akučių skaičių suma lygi } 47179201\}$$

tikimybė didesnė? Suprantama, daugelis be didelių rūpesčių pasitelktų į pagalbą kompiuterį. Bet šiais atvejais galima apsieiti ir be kompiuterio.

Pirmiausia pastebėkime tokią simetriją

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1, \end{array}$$

kuria ir pasinaudosime atsakydami į anksčiau pateiktus klausimus. Pavyzdžiui, kauliuką metėme n kartų. Tegul gautos iškritusių kauliukų akučių konfigūracijos akučių skaičių suma lygi r. Jei gautoje iškritusių kauliukų akučių konfigūracijoje pakeistume kiekvieno kauliuko akučių skaičių pagal nurodytą dėsnį, gautume kitą konfigūraciją. Nesunku suvokti, kad naujai gautos atsivertusių akučių kofigūracijos akučių skaičių suma lygi $7n - r$. Taigi įvykių, metus kauliuką n kartų, atsivertusių akučių skaičių suma lygi r ar $7n - r$, tikimybės yra lygios. Jūs galite įsitikinti, kad į anksčiau pateiktus klausimus atsakymas yra: įvykių A ir B tikimybės yra lygios.

5 Tolydžiųjų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo ir tankio funkcijos

5.1 Tikimybinės erdvės tolydžiųjų atsitiktinių dydžių atveju

Primename, kad tikimybinė erdvė – trejetas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, čia Ω – netuščia aibė, vadinama elementariųjų įvykių erdve, $\mathcal{F}$ – aibės Ω poaibių σ-algebra, P – tikimybinis matas, apibrėžtas σ-algebroje $\mathcal{F}$. Aibės Ω poaibis A, priklausantis σ-algebrai $\mathcal{F}$, yra vadinamas *atsitiktiniu įvykiu.*

Aptarsime atvejį, kai $\Omega = \mathbb{R}$ arba Ω yra įvairiausių intervalų sąjunga.

5.1.1 apibrėžimas. Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė. Funkcija $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, tenkinanti sąlygą

$$X \in \mathfrak{B} \Rightarrow \xi^{-1}(X) \in \mathfrak{F},$$

čia $\mathfrak{B}$ – realiųjų skaičių aibės Borelio poaibių σ-algebra, yra vadinama *mačia.*

5.1.2 apibrėžimas. Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ yra tikimybinė erdvė. Mati funkcija $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ yra vadinama *atsitiktiniu dydžiu, įgyjančiu realias reikšmes.*

5.1.3 apibrėžimas. *Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija $F_\xi(x)$* apibrėžiama lygybe

$$F_\xi(x) = P\Big(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leqslant x\}\Big).$$

Paprastumo dėlei rašysime

$$F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x).$$

Priminsime pasiskirstymo funkcijos $F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$ savybes:

- $F_\xi(x)$ – nemažėjanti funkcija;

- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0;$
- $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1;$
- $\lim\limits_{x\to x_0+0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$ – tolydi iš dešinės.

Nagrinėsime vadinamuosius tolydžius atsitiktinius dydžius ξ ir reikalausime, kad jų pasiskirstymo funkcijos $F_\xi(x)$ būtų diferencijuojamos, t. y. egzistuotų pasiskirstymo funkcijų išvestinės

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x).$$

5.1.4 apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio ξ diferencijuojamos pasiskirstymo funkcijos $F_\xi(x)$ išvestinė $p_\xi(x) = F'_\xi(x)$ yra vadinama *atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo tankiu.* Šiuo atveju atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija $F_\xi(x)$ užrašoma

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt.$$

5.1.5 apibrėžimas. Atsitiktinis dydis ξ yra vadinamas *absoliučiai tolydžiu*, jei jo pasiskirstymo tankio funkcija yra tolydi, išskyrus baigtinį taškų skaičių.

5.1.6 pastaba. Nagrinėsime atsitiktinius dydžius, kurių pasiskirstymo tankio funkcijos yra tolydžios išskyrus baigtinį skaičių taškų.

5.1.7 pastaba. Funkcija $F(x)$ gali būti apibrėžta ir intervale (a, b) (intervalas gali būti iš vienos pusės ar (ir) iš abiejų pusių uždaras), čia a gali būti tiek baigtinis realusis skaičius, tiek ir $-\infty$, b taip pat gali būti tiek baigtinis realusis skaičius, tiek ir ∞. Atviro intervalo atveju

$$\lim_{x\to a+0} F(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to b-0} F(x) = 1,$$

$$F(x) = \int\limits_{a}^{x} p_\xi(t)\,dt, \quad \text{čia } \ x \in (a, b).$$

5.1.8 pastaba. Norėdami rasti atsitiktinio dydžio pasiskirstymo tankio funkciją, turime išdiferencijuoti atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją.

Tarkime, kad atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija užrašoma integralu

$$F(x) = \int\limits_a^{h(x)} q(t)\,dt.$$

Tuomet, pasinaudoję diferencijavimo grandinės taisykle, gauname, kad atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo tankio funkcija yra lygi

$$p_\xi(x) = \frac{d}{dx}F(x) = q\big(h(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}h(x).$$

5.2 Konkrečių pasiskirstymo funkcijų pavyzdžiai

5.2.1 pavyzdys (Tolygus pasiskirstymas intervale). Sakoma, kad atsitiktinis dydis ξ tolygiai pasiskirstęs intervale $[a, b]$, čia $a < b$, jei šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{kai} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{kai} \quad x \notin [a, b]. \end{cases}$$

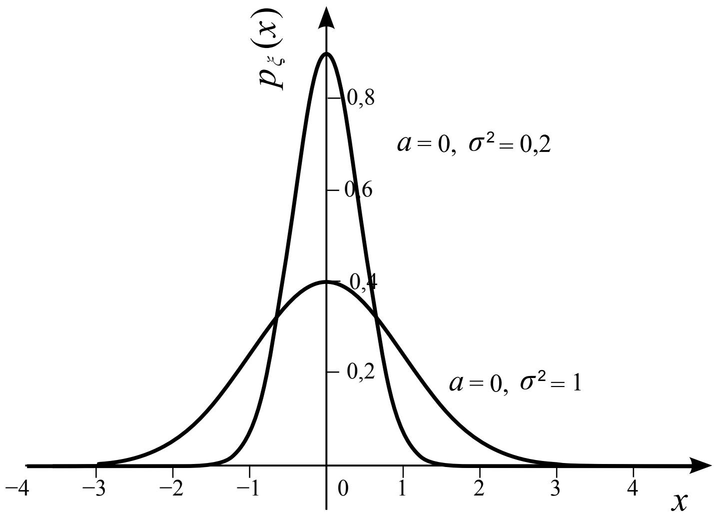
Atsitiktinio dydžio ξ, pasiskirsčiusio tolygiai intervale $[a, b]$ pasiskirstymo funkcija yra lygi

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x \leqslant a, \\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^x dt, & \text{kai} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & \text{kai} \quad x \geqslant b. \end{cases}$$

5.2.2 pavyzdys (Gauso arba normalusis pasiskirstymas). Sakoma, kad atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su parametrais a, σ^2, čia $-\infty < a < \infty$, $0 < \sigma < \infty$, jei šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{čia} \ -\infty < x < \infty.$$

Jei atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su parametrais a, σ^2, $-\infty < a < \infty$, $0 < \sigma < \infty$, tai sakoma ir žymima, kad atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal dėsnį $N(a, \sigma^2)$. Šį faktą priimta užrašyti $\xi \sim N(a, \sigma^2)$.



1 paveikslas. Normaliojo pasiskirstymo tankio funkcijos grafikas

Atsitiktinio dydžio ξ, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį su parametrais a, σ^2, $-\infty < a < \infty$, $0 < \sigma < \infty$, pasiskirstymo funkcija yra lygi

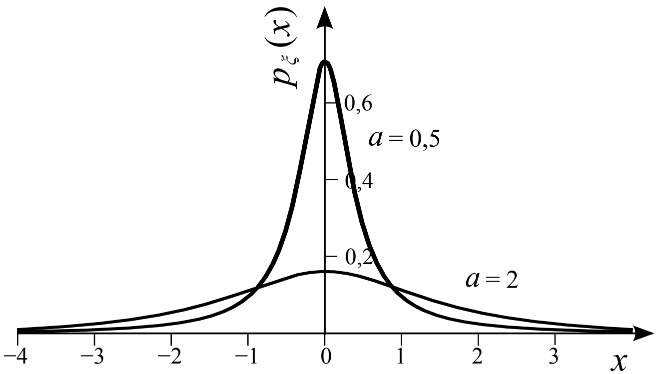
$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} \, dt.$$

Normalusis pasiskirstymas su parametrais 0 ir 1 yra vadinamas *standartiniu*. Atsitiktinio dydžio ξ, pasiskirsčiusio pagal standartinį normalųjį dėsnį, t. y. pagal dėsnį $N(0,1)$, pasiskirstymo funkcija žymima $\Phi(x)$ ir lygi

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

5.2.3 pavyzdys (**Koši (Cauchy) pasiskirstymas**). Sakoma, kad atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal Koši dėsnį su parametru $a > 0$, jei šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{1+a^2x^2}, \text{ čia } -\infty < x < \infty.$$



2 paveikslas. Koši pasiskirstymo tankio funkcijos grafikas

Atsitiktinio dydžio ξ, pasiskirsčiusio pagal Koši dėsnį su parametru $a > 0$, pasiskirstymo funkcija yra

$$F_\xi(x) = \frac{a}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+a^2t^2}\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}(ax).$$

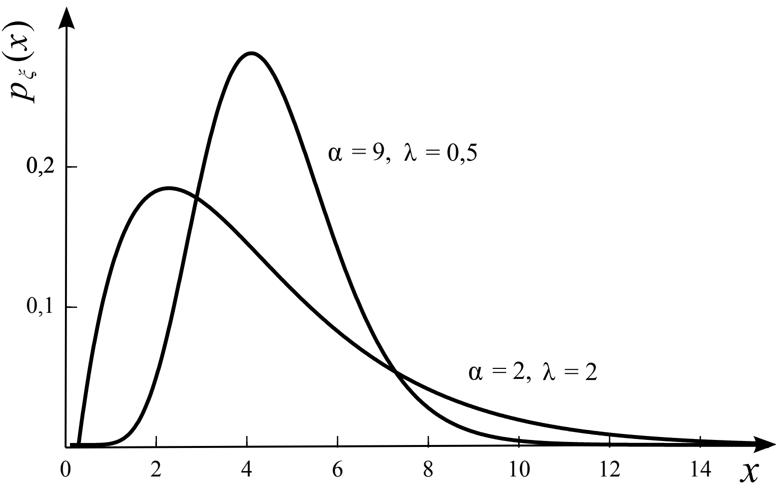
5.2.4 pavyzdys (**Gama pasiskirstymas**). Sakoma, kad atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal gama dėsnį su parametrais $\alpha > 0$ ir $\lambda > 0$, jei šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, & \text{kai} \quad x > 0, \\ 0, & \text{kai} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Gama funkcija apibrėžiama lygybe

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \quad \alpha > 0.$$

Pavyzdžiui, $\Gamma(n+1) = n!$.



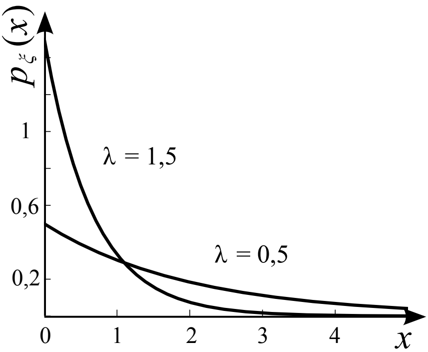
3 paveikslas. Gama pasiskirstymo tankio funkcijos grafikas

Atsitiktinio dydžio ξ, pasiskirsčiusio pagal gama dėsnį su parametrais $\alpha > 0$ ir $\lambda > 0$, pasiskirstymo funkcija yra

$$F_{\alpha,\lambda}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^x \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^{-\lambda t}}\, dt, & \text{kai} \quad x > 0. \end{cases}$$

5.2.5 pavyzdys (**Rodiklinis (eksponentinis) pasiskirstymas).** Sakoma, kad atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal rodiklinį dėsnį su parametru $\lambda > 0$, jei šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kai} \quad x > 0, \\ 0, & \text{kai} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$



4 paveikslas. Rodiklinio pasiskirstymo tankio funkcijos grafikas

Atsitiktinio dydžio ξ, pasiskirsčiusio pagal rodiklinį dėsnį su parametru $\lambda > 0$, pasiskirstymo funkcija yra

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x \leqslant 0, \\ \lambda \int\limits_0^x e^{-\lambda t}\,dt, & \text{kai} \quad x > 0. \end{cases}$$

arba

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{kai} \quad x > 0. \end{cases}$$

5.3 Uždaviniai ir jų sprendimai

5.3.1 pavyzdys. Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo tankio funkcija $p_\xi(x)$ apibrėžiama formule

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x^4}, & \text{kai} \quad x \geqslant 1, \\ 0, & \text{kai} \quad x < 1. \end{cases}$$

Raskite

- konstantos C reikšmę;
- atsitiktinio dydžio $\eta = \dfrac{1}{\xi}$ pasiskirstymo tankio funkciją $p_\eta(x)$.

Sprendimas. Pirmiausia apskaičiuosime C reikšmę:

$$F_\xi(x) = \int\limits_1^x \frac{C}{t^4}\,dt = -\frac{C}{3t^3}\bigg|_1^x = -\frac{C}{3x^3} + \frac{C}{3}.$$

Kadangi $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$, tai

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{C}{3x^3} + \frac{C}{3}\right) = 1,$$

$$\frac{C}{3} = 1 \Rightarrow C = 3.$$

Taigi

$$F_\xi(x) = 1 - \frac{1}{x^3}.$$

Lieka apskaičiuoti atsitiktinio dydžio $\eta = \dfrac{1}{\xi}$ pasiskirstymo tankio funkciją $p_\eta(x)$.

Pastebime, kad $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Pirmiausia rasime atsitiktinio dydžio $\eta = \dfrac{1}{\xi}$ pasiskirstymo funkciją

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\left(\frac{1}{\xi} < x\right) = P\left(\xi > \frac{1}{x}\right),$$

t. y.

$$F_\eta(x) = 1 - P\Big(\xi \leqslant \frac{1}{x}\Big) = 1 - F_\xi\Big(\frac{1}{x}\Big) = x^3, \quad \text{čia } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Atsitiktinio dydžio $\eta = \dfrac{1}{\xi}$ pasiskirstymo tankio funkcija yra lygi

$$p_\eta(x) = \frac{d}{dx}\big(x^3\big) = 3x^2.$$

5.3.2 pavyzdys. Atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal Koši (*Cauchy*) dėsnį, kurio tankis lygus

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad \text{čia } -\infty < x < \infty.$$

Raskite atsitiktinių dydžių $\eta = \dfrac{\xi^2}{1+\xi^2}$ ir $\zeta = \dfrac{1}{1+\xi^2}$ pasiskirstymų tankio funkcijas $p_\eta(x)$ ir $p_\zeta(x)$.

Sprendimas. Tuo tikslu rasime atsitiktinio dydžio $\eta = \dfrac{\xi^2}{1+\xi^2}$ pasiskirstymo funkciją. Turime, kad

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\Big(\frac{\xi^2}{1+\xi^2} < x\Big), \quad \text{čia } 0 < x < 1.$$

Išsprendę nelygybę $\dfrac{\xi^2}{1+\xi^2} < x$ ξ atžvilgiu, gauname

$$\begin{aligned}
F_\eta(x) &= P\Big(\xi^2 < \frac{x}{1-x}\Big) = \\
&= P\Big(-\sqrt{\frac{x}{1-x}} < \xi < \sqrt{\frac{x}{1-x}}\Big) = \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{\frac{x}{1-x}}}^{\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \operatorname{arctg}\Big(-\sqrt{\frac{x}{1-x}}\Big)\Big) = \\
&= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}.
\end{aligned}$$

Atsitiktinio dydžio $\eta = \dfrac{1}{\xi}$ pasiskirstymo tankio funkciją gauname išdiferencijavę pasiskirstymo funkciją (žr. 5.1.8):

$$p_\eta(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Panašiai apskaičiuosime atsitiktinio dydžio $\zeta = \dfrac{1}{1+\xi^2}$ pasiskirstymo tankio funkciją $p_\zeta(x)$.

$$F_\zeta(x) = P(\zeta < x) = P\left(\frac{1}{1+\xi^2} < x\right),\ 0 < x < 1.$$

Išsprendę nelygybę $\dfrac{1}{1+\xi^2} < x$ ξ atžvilgiu, gauname

$$\begin{aligned} F_\zeta(x) &= P\left(\xi^2 > \frac{1-x}{x}\right) = \\ &= P\left(\xi < -\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + P\left(\xi > \sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{\frac{1-x}{x}}}^{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}. \end{aligned}$$

Atsitiktinio dydžio $\eta = \dfrac{1}{\xi}$ pasiskirstymo tankio funkcija

$$p_\zeta(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Kaip matome,

$$p_\eta(x) = p_\zeta(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

5.3.3 pavyzdys. Tegul S^1: $x^2 + y^2 = 1$ yra apskritimas plokštumoje. Vektoriai $\overrightarrow{OA}$, $A \in S^1$ tolygiai pasiskirstę. Apskaičiuokite šių vektorių projekcijų į x ašį ilgių pasiskirstymą ir pasiskirstymo tankį.

Sprendimas. Tarkime, kad kampas tarp vektoriaus $\overrightarrow{OA}$ ir x-ašies yra φ. Tuomet

$$P\Big(|\overrightarrow{OA}|\,|\cos(\varphi)| < t\Big) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\,\Big(\arccos(-t) - \arccos(t)\Big),\; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Vektorių projekcijų į x ašį ilgių pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\pi} \cdot \Big(\arccos(-t) - \arccos(t)\Big) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\; 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

5.3.4 pavyzdys. Tegul S^2: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ yra sfera erdvėje. Vektoriai $\overrightarrow{OA}$, $A \in S^2$ tolygiai pasiskirstę. Apskaičiuokite šių vektorių projekcijų į x ašį ilgių pasiskirstymą ir pasiskirstymo tankį.

Sprendimas. Pastebime, kad

$$\begin{aligned} P\Big(|\, pr_x\overrightarrow{OA}\,| < t\Big) &= \frac{1}{4\pi}\text{plotas}\,\Big\{(x,\,y,\,z) \in S^2 \,\Big|\, |\,x\,| < t\Big\} = \\ &= \frac{1}{4\pi}\text{plotas}\,\Big\{(x,\,y,\,z) \in S^2 \,\Big|\, -t < x < t\Big\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot 2\,\pi \cdot 2\,t = t,\; 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned}$$

Vektorių projekcijų į x ašį ilgių pasiskirstymo tankio funkcija yra lygi

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad t < 0, \\ 1, & \text{kai} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & \text{kai} \quad t > 1. \end{cases}$$

5.3.5 pavyzdys. Tegul S^2: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ yra sfera erdvėje. Vektoriai $\overrightarrow{OA}$, $A \in S^2$ tolygiai pasiskirstę. Apskaičiuokite šių vektorių projekcijų į xy plokštumą ilgių pasiskirstymą ir pasiskirstymo tankį.

Sprendimas. Pastebime, kad

$$\begin{aligned} P\Big(|\,pr_{xy}\overrightarrow{OA}\,| < t\Big) &= \frac{1}{4\pi}\text{plotas}\Big\{(x,\,y,\,z)\in S^2\,\big|\,|\,z\,| > \sqrt{1-t^2}\Big\} = \\ &= \frac{1}{4\pi}\cdot 2\,\pi\left(2-2\sqrt{1-t^2}\right) = \\ &= 1-\sqrt{1-t^2},\ 0\leqslant t\leqslant 1. \end{aligned}$$

Vektorių projekcijų į xy plokštumą ilgių pasiskirstymo tankio funkcija yra lygi

$$p(t) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad t < 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}, & \text{kai} \quad 0\leqslant t\leqslant 1, \\ 0, & \text{kai} \quad t > 1. \end{cases}$$

6 Tolydžiųjų atsitiktinių dydžių skaitinės charakteristikos

6.1 Atsitiktinių dydžių vidurkiai ir dispersijos

6.1.1 apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio ξ, kurio pasiskirstymo tankio funkcija yra $p_\xi(x)$, vidurkis $E\xi$ apibrėžiamas lygybe

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx. \tag{6}$$

Savaime suprantama, kad galima kalbėti apie atsitiktinio dydžio vidurkį, jei egzistuoja (6) integralas.

Jei atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$, tai

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x).$$

6.1.2 apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio ξ, kurio pasiskirstymo tankio funkcija yra $p_\xi(x)$, dispersija $D\xi$ apibrėžiama lygybe

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2\, p(x)\, dx. \tag{7}$$

Suprantama, kad galima kalbėti apie atsitiktinio dydžio dispersiją, jei egzistuoja atsitiktinio dydžio baigtinis vidurkis ir egzistuoja (7) integralas.

Jei atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$, tai

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2\, dF(x).$$

6.1.3 pavyzdys. Atsitiktinio dydžio ξ, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį su parametrais a ir σ^2, čia $-\infty < a < \infty$ ir $0 < \sigma < \infty$, vidurkis lygus a, o dispersija lygi σ^2, t. y. $E\xi = a$ ir $D\xi = \sigma^2$.

6.1.4 pavyzdys. Atsitiktinio dydžio ξ, tolygiai pasiskirsčiusio baigtiniame intervale $[a, b]$, čia $a < b$, vidurkis yra lygus

$$E\xi = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{b+a}{2}.$$

Atsitiktinio dydžio ξ, tolygiai pasiskirsčiusio baigtiniame intervale $[a, b]$, $a < b$, dispersija yra lygi

$$\begin{aligned}
D\xi &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x^2 - (b+a)x + \frac{(b+a)^2}{4}\right) dx = \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(b+a)(b^2-a^2)}{2} + \frac{(b+a)^2(b-a)}{4}\right) = \\
&= \frac{b^3-a^3}{3\,(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{2} + \frac{(b+a)^2}{4} = \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}.
\end{aligned}$$

6.1.5 pavyzdys. Atsitiktinio dydžio ξ, pasiskirsčiusio pagal Koši dėsnį su parametru $a > 0$, vidurkis neegzistuoja. Primename, kad atsitiktinio dydžio pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{1+a^2x^2}, \quad \text{čia } -\infty < x < \infty.$$

Netiesioginis integralas

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\,x}{1+a^2x^2}\,dx$$

diverguoja (žr. 8.3.2).

Vadinasi, neegzistuoja ir šio atsitiktinio dydžio dispersija.

6.1.6 pavyzdys. Atsitiktinio dydžio ξ, pasiskirsčiusio pagal gama dėsnį su parametrais $\alpha > 0$ ir $\lambda > 0$ (žr. 5.2.4), vidurkis yra lygus

$$E\xi = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty (\lambda\, x)^\alpha\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\, \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda},$$

nes $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$.

6.1.7 uždavinys. Įrodykite, kad atsitiktinio dydžio ξ, pasiskirsčiusio pagal gama dėsnį su parametrais $\alpha > 0$ ir $\lambda > 0$,

$$D\xi = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

6.2 Uždaviniai ir jų sprendimai

6.2.1 pavyzdys. Atsitiktinis dydis ξ tolygiai pasiskirstęs intervale $[0, 2\pi]$. Apibrėžkime atsitiktinius dydžius $\eta_1 = \cos\xi$, $\eta_2 = \sin\xi$.

Apskaičiuokite $E\eta_1$, $E\eta_2$, $Cov(\eta_1, \eta_2)$.

Ar atsitiktiniai dydžiai η_1 ir η_2 yra nepriklausomi?

Sprendimas. Kadangi $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, tai atsitiktiniai dydžiai η_1 ir η_2 yra priklausomi. Galima ir tiesiogiai įsitikinti, kad

$$F_{(\eta_1,\, \eta_2)}(x,\, y) \neq F_{\eta_1}(x) \cdot F_{\eta_2}(y).$$

Apskaičiuosime atsitiktinių dydžių η_1 ir η_2 vidurkius

$$E\eta_1 = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_0^{2\,\pi} \cos t\, dt = 0,$$

$$E\eta_2 = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_0^{2\,\pi} \sin t\, dt = 0,$$

ir kovariaciją

$$Cov(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_0^{2\,\pi} \sin t\, \cos t\, dt = 0.$$

6.2.2 pastaba. Jei atsitiktiniai dydžiai η_1 ir η_2 yra nepriklausomi, tai

$$Cov(\eta_1, \eta_2) = 0.$$

Iš (6.2.1) pavyzdžio matome, jei atsitiktinių dydžių η_1 ir η_2 kovariacija

$$Cov(\eta_1, \eta_2) = 0,$$

tai negalima daryti išvados, kad atsitiktiniai dydžiai η_1 ir η_2 yra priklausomi ar nepriklausomi.

6.3 Dvimačiai tolydieji atsitiktiniai dydžiai

6.3.1 apibrėžimas. Tolydžiųjų atsitiktinių dydžių pora (ξ, η), kurios įgyjamų reikšmių tikimybės apibrėžtos funkcija

$$F_{(\xi,\eta)}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y), \ \text{čia} \ x, y \in \mathbb{R},$$

yra vadinama *dvimačiu atsitiktiniu dydžiu.* Funkcija $F_{(\xi,\eta)}(x, y)$ yra vadinama *tolydžiojo dvimačio atsitiktinio dydžio* (ξ, η) *pasiskirstymo funkcija.*

6.3.2 apibrėžimas. Jei tolydžiojo dvimačio atsitiktinio dydžio (ξ, η) įgyjamų reikšmių tikimybės apibrėžtos pasiskirstymo funkcija $F_{(\xi,\eta)}(x, y)$, tai

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{(\xi,\eta)}(x, y)\, dy$$

yra *atsitiktinio dydžio* ξ *įgyjamų reikšmių pasiskirstymo funkcija.* Panašiai,

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{(\xi,\eta)}(x, y)\, dx$$

yra *atsitiktinio dydžio* η *įgyjamų reikšmių pasiskirstymo funkcija.*

Tokiu būdu gautos atsitiktinių dydžių ξ ir η įgyjamų reikšmių pasiskirstymo funkcijos yra vadinamos *kraštutinėmis (marginaliosiomis) pasiskirstymo funkcijomis.*

6.3.3 apibrėžimas. Tolydžiojo dvimačio atsitiktinio dydžio (ξ, η) komponentės ξ ir η yra vadinamos *nepriklausomomis*, jei

$$F_{(\xi,\,\eta)}(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y), \quad \text{čia } \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Kitaip tariant, atsitiktiniai dydžiai ξ ir η yra nepriklausomi, jei jų įgyjamų reikšmių pasiskirstymo funkcija yra lygi kraštutinių (marginaliųjų) pasiskirstymo funkcijų sandaugai.

6.3.4 apibrėžimas. Jei tolydžiojo dvimačio atsitiktinio dydžio (ξ, η) įgyjamų reikšmių pasiskirstymo funkcija $F_{(\xi,\,\eta)}(x, y)$ užrašoma pavidalu

$$F_{(\xi,\,\eta)}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p_{(\xi,\,\eta)}(u, v)\, du\, dv,$$

tai funkcija $p_{(\xi,\,\eta)}(u, v)$ yra vadinama *tolydžiojo dvimačio atsitiktinio dydžio* (ξ, η) *įgyjamų reikšmių pasiskirstymo funkcijos tankio funkcija.* Vengdami ilgų pasakymų, sakysime, kad $p_{(\xi,\,\eta)}(u, v)$ yra *atsitiktinio dydžio* (ξ, η) *tankio funkcija.*

6.4 Dvimačių tolydžiųjų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo ir tankio funkcijų pavyzdžiai

6.4.1 apibrėžimas. Tegul D dvimatė sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Dviejų kintamųjų funkciją $\mathbf{1}_D$, apibrėžiama lygybe

$$\mathbf{1}_D(x,\, y) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad (x, y) \in D, \\ 0, & \text{kai} \quad (x, y) \notin D, \end{cases}$$

yra vadinamą *srities* D *charakteristine funkcija.*

6.4.2 pavyzdys. Sakysime, kad tolydusis dvimatis atsitiktinis dydis (ξ, η) pasiskirstęs tolygiai dvimatėje srityje D, kurios plotas yra baigtinis, jei atsitiktinio dydžio (ξ, η) įgyjamų reikšmių pasiskirstymo funkcija $F_{(\xi,\,\eta)}(x, y)$ užrašoma pavidalu

$$F_{(\xi,\,\eta)}(x, y) = \frac{1}{vol(D)} \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \mathbf{1}_D(u, v)\, du\, dv,$$

čia $\mathbf{1}_D(x,\, y)$ – srities D charakteristinė funkcija, $vol(D)$ – srities D plotas. Paprasčiausios sritys – uždarieji stačiakampiai:

$$D = [a,b] \times [c,d] = \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, a \leqslant u \leqslant b,\, c \leqslant v \leqslant d\Big\}.$$

Šiuo atveju

$$F_{(\xi,\,\eta)}(x,y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int\limits_a^x \int\limits_c^y \mathbf{1}_D(u,v)\, du\, dv.$$

6.4.3 pavyzdys. Tolydusis dvimatis atsitiktinis dydis (ξ,η) yra pasiskirstęs pagal dvimatį normalųjį dėsnį, jei šio atsitiktinio dydžio tankio funkcija yra

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{|T|}}\, e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})T^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^t},$$

čia T – simetrinė, teigiamai apibrėžta matrica. Matrica

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

yra simetrinė, jei $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, ir teigiamai apibrėžta, jei $\sigma_{11} > 0$ ir $\det T > 0$.

6.5 Uždaviniai ir jų sprendimai

6.5.1 pavyzdys. Dvimačio atsitiktinio dydžio $(\xi,\ \eta)$ pasiskirstymas yra tolygus skritulyje $x^2+y^2 \leqslant 1$. Apskaičiuokite tikimybę $P\Bigg(|\xi| \leqslant \frac{3}{4}, |\eta| \leqslant \frac{3}{4}\Bigg)$.

Sprendimas. Dvimačio atsitiktinio dydžio (ξ,η) pasiskirstymas skritulyje $x^2+y^2 \leqslant 1$ yra tolygus. Vadinasi,

$$P\Bigg(|\xi| \leqslant \frac{3}{4}, |\eta| \leqslant \frac{3}{4}\Bigg) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant\frac{3}{4},|y|\leqslant\frac{3}{4}\\ x^2+y^2\leqslant 1}} dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi - 4\left(\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ -\arccos\frac{3}{4}\leqslant\varphi\leqslant\arccos\frac{3}{4}}} r\,d\,r\,d\,\varphi - \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi}\left(4\arccos\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{63}}{4}\right).$$

6.5.2 pavyzdys. Dvimačio atsitiktinio dydžio $(\xi_1,\ \xi_2)$ pasiskirstymo tankis apibrėžiamas šiomis lygybėmis

$$p_{\xi_1,\,\xi_2}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(u^2+v^2)^3}, & \text{kai} \quad u^2+v^2 \geqslant 1, \\ 0, & \text{kai} \quad u^2+v^2 < 1. \end{cases}$$

Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio $\eta = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ pasiskirstymą ir pasiskirstymo tankį.

Sprendimas. Atsitiktinio dydžio η pasiskirstymo funkcija lygi

$$P(\eta < z) = P\left(\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} < z\right) = \frac{2}{\pi}\iint\limits_{1\leqslant u^2+v^2\leqslant z^2} \frac{1}{(u^2+v^2)^3}\,du\,dv.$$

Šiame integrale padarykime kintamųjų pakeitimą. Pažymėkime

$$u = r\cos\varphi,\ v = r\sin\varphi,\ \text{čia}\ 0 \leqslant r^2 \leqslant z^2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Tuomet

$$du\,dv = r\,d\,r\,d\,\varphi,\ \ u^2+v^2 = r^2,$$

vadinasi, galime užrašyti

$$P(\eta < z) = \frac{2}{\pi}\iint\limits_{\substack{1\leqslant r\leqslant z\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \frac{1}{r^6}\,r dr\,d\varphi = 1 - \frac{1}{z^4}.$$

Atsitiktinio dydžio $\eta = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ pasiskirstymo tankis yra lygus

$$p_\eta(z) = \frac{d}{dz}\left(1 - \frac{1}{z^4}\right) = \frac{4}{z^5},\ z \geqslant 1.$$

6.6 Atsitiktinių dydžių sumos pasiskirstymo ir tankio funkcijos, funkcijų sąsūkos

Mūsų tikslas išsiaiškinti, kaip susijusios atsitiktinių dydžių ξ, η ir $\xi+\eta$, ir $\dfrac{\xi}{\eta}$, $\dfrac{\xi}{\sqrt{\eta}}$, kai $\eta > 0$, pasiskirstymo ir pasiskirstymo tankio funkcijos. Šiuo tikslu mums reikalingas funkcijų sąsūkos apibrėžimas. Tai speciali operacija, kuria pagrįsta iš dviejų (ir iš daugiau nei dviejų) funkcijų naujos funkcijos sudarymas.

6.6.1 apibrėžimas (Funkcijų sąsūka). Funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$, apibrėžtų realiųjų skaičių aibėje, *sąsūka* yra vadinama funkcija

$$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\, g(s)\, ds.$$

Funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ sąsūka yra žymima $(f \star g)(x)$, t. y.

$$(f \star g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-s)\, g(s)\, ds.$$

Tegul atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija yra $F_\xi(x)$, o atsitiktinio dydžio η pasiskirstymo funkcija yra $F_\eta(x)$. Galime nagrinėti atsitiktinių dydžių ξ ir η sutvarkytą porą (ξ, η) kaip dvimatį atsitiktinį dydį, kurio pasiskirstymo funkcija yra $H(x,y) = F_\xi(x)\, F_\eta(y)$, t. y.

$$H(x,y) = P\big((\xi,\eta) \mid \xi < x,\ \eta < y\big) =$$

$$= P\big((\xi,\eta) \in (-\infty, x) \times (-\infty, y)\big) = F_\xi(x)\, F_\eta(y).$$

Paprastai tariant, atsitiktinius dydžius ξ ir η traktuojame kaip nepriklausomus. Tarkime, kad egzistuoja atsitiktinių dydžių ξ ir η tankio funkcijos $f_\xi(t)$ ir $f_\eta(t)$. Tuomet galime užrašyti

$$H(x,y) = \iint\limits_{(-\infty,\, x)\times(-\infty,\, y)} f_\xi(t)\, f_\eta(s)\, dt\, ds = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\, dt \int\limits_{-\infty}^{y} f_\eta(s)\, ds.$$

Dabar išsiaiškinsime, kaip išreiškiama atsitiktinio dydžio $\xi+\eta$ pasiskirstymo funkcija $H(x) = P(\xi+\eta < x)$. Nesunku suvokti, kad atsitiktinio dydžio $\xi+\eta$ pasiskirstymo funkciją galime užrašyti kaip dvilypį integralą pagal sritį $t+s<x$ (pusplokštumę) plokštumoje $t\,s$.

$$P(\xi+\eta<x) = \iint\limits_{t+s<x} f_\xi(t)\, f_\eta(s)\, dt\, ds.$$

Šį integralą galime suvesti į kartotinius:

$$\iint\limits_{t+s<x} f_\xi(t) f_\eta(s)\, dt\, ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{x-t} f_\xi(t)\, f_\eta(s)\, ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)\, F_\eta(x-t)\, dt.$$

Kadangi apibrėžiant atsitiktinių dydžių ξ ir η sumos $\xi+\eta$ pasiskirstymo funkciją $P(\xi+\eta<x)$ atsitiktinių dydžių vaidmuo simetriškas, tai

$$P(\xi+\eta<x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)\, F_\eta(x-t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x-s)\, f_\eta(s)\, ds.$$

Suformuluokime gautą rezultatą, kaip teiginį.

6.6.2 teiginys. Tegul nepriklausomų atsitiktinių dydžių ξ ir η pasiskirstymo ir tankio funkcijos yra $F_\xi(x)$, $f_\xi(x)$ ir $F_\eta(x)$, $f_\eta(x)$. Tuomet atsitiktinio dydžio $\xi+\eta$ pasiskirstymo funkcija $H(x)$ yra lygi

$$H(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)\, F_\eta(x-t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x-s)\, f_\eta(s)\, ds,$$

kitaip tariant, $H(x) = (f_\xi * F_\eta)(x) = (F_\xi * f_\eta)(x)$.

6.6.3 pastaba. Jei atsitiktiniai dydžiai ξ ir η įgyja neneigiamas reikšmes, tuomet tiek $f_\xi(t) = 0$, tiek ir $f_\eta(t) = 0$, kai $t \leqslant 0$. Tuomet atsitiktinio dydžio $\xi+\eta$ pasiskirstymo funkcija $P(\xi+\eta<x)$ yra lygi

$$P(\xi+\eta<x) = \int\limits_{0}^{x} f_\xi(t)\, F_\eta(x-t)\, dt = \int\limits_{0}^{x} F_\xi(x-s)\, f_\eta(s)\, ds.$$

Kadangi atsitiktinio dydžio tankio funkcija yra pasiskirstymo funkcijos išvestinė, tai atsitiktinio dydžio $\xi+\eta$ tankio funkcija $f_{\xi+\eta}(x)$ yra gaunama išdiferencijuojant funkciją $H(x)$.

6.6.4 teiginys. Tegul nepriklausomų atsitiktinių dydžių ξ ir η tankio funkcijos yra $f_\xi(x)$ ir $f_\eta(x)$. Tuomet atsitiktinio dydžio $\xi+\eta$ tankio funkcija $f_{\xi+\eta}(x)$ yra lygi

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)\, f_\eta(x-t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x-s)\, f_\eta(s)\, ds,$$

t. y.

$$f_{\xi+\eta}(x) = (f_\xi * f_\eta)(x).$$

6.6.5 pastaba. Jei atsitiktiniai dydžiai ξ ir η įgyja neneigiamas reikšmes, tuomet tiek $f_\xi(t)=0$, tiek ir $f_\eta(t)=0$, kai $t\leqslant 0$. Tuomet atsitiktinio dydžio $\xi+\eta$ tankio funkcija $f_{\xi+\eta}(x)$ atrodo taip:

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{0}^{x} f_\xi(t)\, f_\eta(x-t)\, dt = \int\limits_{0}^{x} f_\xi(x-s)\, f_\eta(s)\, ds.$$

6.6.6 pavyzdys. Tegul nepriklausomų atsitiktinių dydžių ξ ir η tankio funkcijos yra

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x<0, \\ \dfrac{1}{3}, & \text{kai} \quad 0\leqslant x\leqslant 3, \\ 0, & \text{kai} \quad x>3, \end{cases}$$

ir

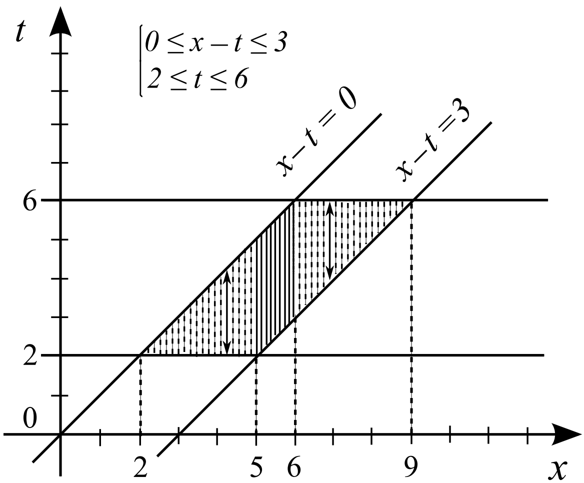
$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x<2, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{kai} \quad 2\leqslant x\leqslant 6, \\ 0, & \text{kai} \quad x>6. \end{cases}$$

Kaip matome, atsitiktinis dydis ξ tolygiai pasiskirstęs intervale $[0,3]$, o atsitiktinis dydis η tolygiai pasiskirstęs intervale $[2,6]$.

Raskite atsitiktinių dydžių ξ ir η sumos $\xi+\eta$ tankio funkciją.
Sprendimas.

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_2^6 f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 2, \\ \int_2^x f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt, & \text{kai} \quad 2 \leqslant x \leqslant 5, \\ \int_{x-3}^x f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt, & \text{kai} \quad 5 \leqslant x \leqslant 6, \\ \int_{x-3}^6 f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt, & \text{kai} \quad 6 \leqslant x \leqslant 9, \\ 0, & \text{kai} \quad x > 9. \end{cases}$$



5 paveikslas. Integravimo sritis

Įrašę tankio funkcijas ir suintegravę, gauname

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{2}^{6} f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 2, \\ \dfrac{x-2}{12}, & \text{kai} \quad 2 \leqslant x \leqslant 5, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{kai} \quad 5 \leqslant x \leqslant 6, \\ \dfrac{9-x}{12}, & \text{kai} \quad 6 \leqslant x \leqslant 9, \\ 0, & \text{kai} \quad x > 9. \end{cases}$$

Kaip matome, atsitiktinių dydžių ξ ir η suma $\xi + \eta$ nėra tolygiai pasiskirsčiusi.

6.6.7 pavyzdys. Tegul nepriklausomų atsitiktinių dydžių ξ ir η tankio funkcijos yra

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 0, \\ \dfrac{\sin x}{2}, & \text{kai} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{kai} \quad x > \pi, \end{cases}$$

ir

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 0, \\ 2x, & \text{kai} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{kai} \quad x > 1. \end{cases}$$

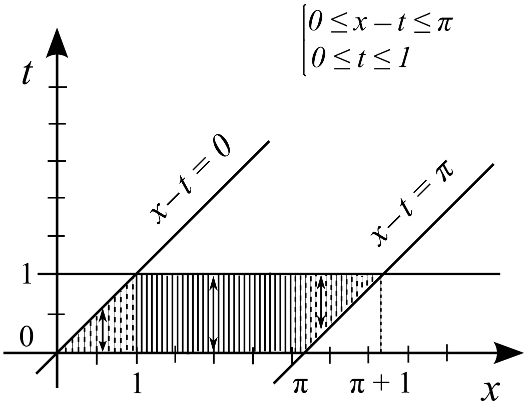
Matome, kad atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal sinuso dėsnį intervale $[0, \pi]$, o atsitiktinis dydis η pasiskirstęs pagal tiesinį dėsnį intervale $[0, 1]$.

Raskite atsitiktinių dydžių ξ ir η sumos $\xi + \eta$ tankio funkciją.

Sprendimas.

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_0^1 f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 0, \\ \int\limits_1^x f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt, & \text{kai} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \int\limits_0^1 f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt, & \text{kai} \quad 1 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \int\limits_{x-\pi}^1 f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt, & \text{kai} \quad \pi \leqslant x \leqslant 1+\pi, \\ 0, & \text{kai} \quad x > 1+\pi. \end{cases}$$



6 paveikslas. Integravimo sritis

Įrašę tankio funkcijas ir suintegravę, gauname

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 0, \\ x - \sin x, & \text{kai} \quad 0 \le x \le 1, \\ \sin(x-1) + \cos(x-1) - \sin x, & \text{kai} \quad 1 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \sin(x-1) + \cos(x-1) + x - \pi, & \text{kai} \quad \pi \leqslant x \leqslant 1+\pi, \\ 0, & \text{kai} \quad x > 1+\pi. \end{cases}$$

6.6.8 pavyzdys. Tegul nepriklausomų atsitiktinių dydžių ξ ir η tankio funkcijos yra

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kai} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

ir

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 2, \\ \frac{1}{2}, & \text{kai} \quad 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0, & \text{kai} \quad x > 4. \end{cases}$$

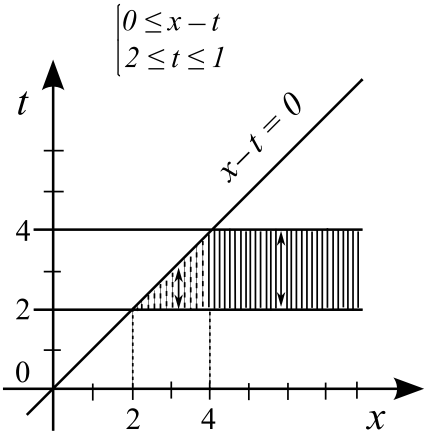
Matome, kad atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį su parametru λ, o atsitiktinis dydis ξ tolygiai pasiskirstęs intervale $[2, 4]$.

Raskite atsitiktinių dydžių ξ ir η sumos $\xi + \eta$ tankio funkciją.

Sprendimas.

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_2^4 f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 2, \\ \int_1^x f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt, & \text{kai} \quad 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ \int_2^4 f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt, & \text{kai} \quad x \geqslant 4. \end{cases}$$



7 paveikslas. Integravimo sritis

Įrašę tankio funkcijas ir suintegravę, gauname

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 2, \\ \dfrac{1 - e^{-\lambda(x-2)}}{2}, & \text{kai} \quad 2 \leqslant x \leqslant 4, \\ \dfrac{e^{-\lambda(x-2)}(e^{2\lambda} - 1)}{2}, & \text{kai} \quad x \geqslant 4. \end{cases}$$

6.6.9 pavyzdys. Tegul nepriklausomų atsitiktinių dydžių ξ ir η tankio funkcijos yra

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{kai} \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

ir

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 0, \\ \mu e^{-\mu x}, & \text{kai} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Matome, kad atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį su parametru λ, o atsitiktinis dydis η pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį su parametru μ.

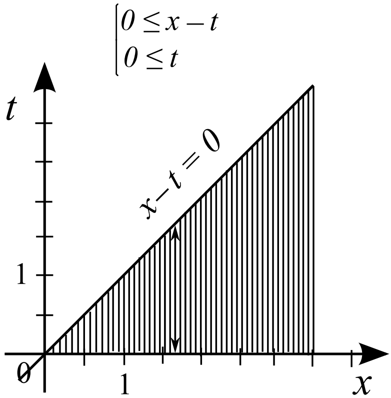
Raskite atsitiktinių dydžių ξ ir η sumos $\xi+\eta$ tankio funkciją.
Sprendimas. Pirmiausia išnagrinėsime atvejį, kai $\lambda \neq \mu$,

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_0^\infty f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x<0, \\ \int\limits_0^x f_\xi(x-t)\, f_\eta(t)\, dt, & \text{kai} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Įrašę tankio funkcijų išraiškas, gauname

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mu e^{-\mu t}\, dt = \lambda\mu e^{-\lambda x} \int\limits_0^x e^{(\lambda-\mu)t}\, dt =$$
$$= \frac{\lambda\mu e^{-\lambda x}}{\lambda-\mu}\big(e^{(\lambda-\mu)x}-1\big) = \frac{\lambda\mu(e^{-\mu x}-e^{-\lambda x})}{\lambda-\mu},$$

čia $\lambda \neq \mu$.



8 paveikslas. Integravimo sritis

Galutinai gauname

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 0, \\ \dfrac{\lambda\mu(e^{-\mu x} - e^{-\lambda x})}{\lambda - \mu}, & \text{kai} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Kai $\lambda = \mu$, tai galite įsitikinti, kad

$$f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x < 0, \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{kai} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Kaip matote, jei atsitiktiniai dydžiai ξ ir η pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį su parametrais λ ir μ, tai atsitiktinis dydis $\xi + \eta$ tiek atveju $\lambda \neq \mu$, tiek ir atveju $\lambda = \mu$ nėra pasiskirstęs pagal eksponentinį dėsnį.

6.6.10 pavyzdys. Dabar išnagrinėsime atvejį, kai nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ξ ir η pasiskirstę pagal Puasono dėsnį su parametrais λ ir μ. Įsitikinsime, kad atsitiktinis dydis $\xi + \eta$ taip pat pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį su parametru $\lambda + \mu$. Kaip žinome, λ yra atsitiktinio dydžio ξ vidurkis, o μ – atsitiktinio dydžio η vidurkis. Taip pat žinome, kad atsitiktinių dydžių sumos vidurkis yra lygus atsitiktinių dydžių vidurkių sumai.

6.6.11 teiginys. Tegul nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ξ ir η pasiskirstę pagal Puasono dėsnį su parametrais λ ir μ. Tuomet atsitiktinis dydis $\xi+\eta$ taip pat yra pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį su parametru $\lambda + \mu$.

Įrodymas. Kadangi ξ ir η pasiskirstę pagal Puasono dėsnį su parametrais λ ir μ, tai

$$\left.\begin{aligned} P(\xi = m) &= \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \\ P(\eta = n) &= \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}, \end{aligned}\right. \qquad \text{čia} \;\; m, n \geqslant 0.$$

Tuomet

$$P(\xi+\eta=n)=\sum_{m=1}^{n}P(\xi=m)P(\eta=n-m)=$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\frac{\mu^{n-m}}{(n-m)!}e^{-\mu}=e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda^m\mu^{n-m}}{m!(n-m)!}=$$
$$=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!\lambda^m\mu^{n-m}}{m!(n-m)!}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\mathbb{C}_n^m\lambda^m\mu^{n-m}.$$

Kadangi

$$\sum_{m=0}^{n}\mathbb{C}_n^m\lambda^m\mu^{n-m}=(\lambda+\mu)^n,$$

tai

$$P(\xi+\eta=n)=\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)},$$

t. y. atsitiktinis dydis $\xi+\eta$ pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį su parametru $\lambda+\mu$.

Panašiai, kaip ir praeitame pavyzdyje, teisingas teiginys.

6.6.12 teiginys. Tegul nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ξ ir η pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį su parametrais (a,σ^2) ir (b,τ^2). Tuomet atsitiktinis dydis $\xi+\eta$ taip pat pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su parametrais $(a+b,\sigma^2+\tau^2)$.

Įrodymas. Atsitiktinių dydžių ξ ir η tankio funkcijos yra

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$
$$p_\eta(x)=\frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-b)^2}{2\tau^2}}.$$

Rasime šių funkcijų sąsūkos išraišką.

$$
\begin{aligned}
p_{\xi+\eta}(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t-a)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(t-b)^2}{2\tau^2}}\,dt = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}-\frac{b^2}{2\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2(x-a)t-t^2}{2\sigma^2}-\frac{t^2-2bt}{2\tau^2}}\,dt = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}-\frac{b^2}{2\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2(x-a)\tau^2 t-\tau^2t^2-\sigma^2t^2+2\sigma^2bt}{2\sigma^2\tau^2}}\,dt = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}-\frac{b^2}{2\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(\sigma^2+\tau^2)t^2-2((x-a)\tau^2+b\sigma^2)t}{2\sigma^2\tau^2}\right)}\,dt = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}-\frac{b^2}{2\tau^2}+\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}\left(\frac{(x-a)\tau^2+b\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\right)^2} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}\left(\sqrt{\sigma^2+\tau^2}\,t-\frac{(x-a)\tau^2+b\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\right)^2}\,dt = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} e^{-\frac{(x-(a+b))^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}\left(\sqrt{\sigma^2+\tau^2}\,t-\frac{(x-a)\tau^2+b\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\right)^2}\,dt.
\end{aligned}
$$

Atlikę kintamųjų pakeitimą

$$
\frac{1}{\sigma\tau}\Big(\sqrt{\sigma^2+\tau^2}\,t-\frac{(x-a)\tau^2+b\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\Big) = u,
$$

gauname

$$
dt = \frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\,du.
$$

Įrašę pakeitimus į integralą, galutinai gauname

$$p_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}e^{-\frac{(x-(a+b))^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+\tau^2)}}e^{-\frac{(x-(a+b))^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}},$$

nes

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{2\pi}.$$

6.6.13 pastaba. Pateiktas įrodymas paprastas, bet gana ilgas tvarkingai atliekant skaičiavimus. Matematikams pateikiamas įrodymas, pagrįstas charakteringųjų funkcijų teorija. Atsitiktinio dydžio charakteringoji funkcija yra atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos vadinamoji *Furje transformacija.* Žinant atsitiktinio dydžio charakteringąją funkciją galima atstatyti atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją. Įrodoma, kad nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos charakteringoji funkcija yra lygi atsitiktinių dydžių charakteringųjų funkcijų sandaugai. Šis teiginys yra atskiras atvejis fakto, kad funkcijų sąsūkos Furje transformacija yra lygi funkcijų Furje transformacijų sandaugai. Atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį su parametrais a ir σ^2, charakteringoji funkcija yra

$$f(t) = e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}},$$

čia $i = \sqrt{-1}$ – menamasis vienetas. Akivaizdu, kad sudauginę funkcijas,

$$f(t) = e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

ir

$$g(t) = e^{ibt-\frac{\tau^2t^2}{2}},$$

gauname funkciją

$$f(t)\cdot g(t) = e^{i(a+b)t-\frac{(\sigma^2+\tau^2)t^2}{2}}.$$

O ši funkcijų sandauga yra atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį su parametrais $a+b$ ir $\sigma^2+\tau^2$ charakteringoji funkcija.

6.6.14 pastaba. Kalbant apie retai įvykstančius įvykius, Puasono pasiskirstymo dėsnis, galima sakyti, yra universalus. Normalusis pasiskirstymo dėsnis yra išskirtinis, nes jis praktiškai dažniausiai sutinkamas. Be to, kaip teigia centrinė ribinė teorema, nepriklausomų atsitiktinių dydžių, tenkinančių pakankamai bendras sąlygas, sumos pasiskirsčiusios pagal normalųjį dėsnį. Atkreipkite dėmesį: įrodėme, kad, jei nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai pasiskirstę pagal Puasono ar normalųjį dėsnį, tai šių atsitiktinių dydžių sumos taip pat yra pasiskirsčiusios pagal Puasono ar normalųjį dėsnį. Tai įdomus fenomenas.

6.7 Atsitiktinių dydžių ξ, η ir $\frac{\xi}{\eta}$ pasiskirstymo, tankio funkcijų sąsajos

Dabar išsiaiškinsime, kaip susijusios atsitiktinių dydžių ξ, η ir $\dfrac{\xi}{\eta}$, kai $\eta > 0$, pasiskirstymo ir pasiskirstymo tankio funkcijos.

6.7.1 teiginys. Tegul $F_\xi(x)$ ir $G_\eta(x)$ atsitiktinių dydžių ξ ir η pasiskirstymo funkcijos. Tuomet atsitiktinio dydžio $\dfrac{\xi}{\eta}$, kai $\eta > 0$, pasiskirstymo funkcija yra lygi

$$H_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = P\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) = P(\xi < x \cdot \eta) = \int\limits_0^\infty F_\xi(x \cdot t)\, \frac{d}{dt} G_\eta(t)\, dt.$$

Atsitiktinio dydžio $\frac{\xi}{\eta}$ pasiskirstymo tankio funkcija yra lygi

$$p_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \int\limits_0^\infty p_\xi(x \cdot t)\, p_\eta(t) \cdot t\, dt.$$

Įrodymas. Remdamiesi pilnosios tikimybės formule, užrašome

$$P(\xi < x \cdot \eta) \approx \sum_{j=1}^{n-1} P\left(\xi < x \cdot \frac{A}{j} n\right) P\left(\frac{Aj}{n} \leqslant \eta < \frac{A(j+1)}{n}\right), \qquad (8)$$

pakankamai dideliems A ir n.

Tikimybę

$$P\left(\frac{Aj}{n} \leqslant \eta < \frac{A(j+1)}{n}\right)$$

pasinaudoję tankio funkcija užrašome

$$P\left(\frac{Aj}{n} \leqslant \eta < \frac{A(j+1)}{n}\right) = \int\limits_{\frac{Aj}{n}}^{\frac{A(j+1)}{n}} p_\eta(t)\, dt = p_\eta(u)\frac{A}{n},$$

čia $\dfrac{Aj}{n} \leqslant u \leqslant \dfrac{A(j+1)}{n}$.

Perėję prie ribos, kai $n \to \infty$, (8) lygybės dešinėje pusėje, gauname

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} P\Big(\xi < x \cdot \frac{A}{j} n\Big) P\Big(\frac{Aj}{n} \leqslant \eta < \frac{A(j+1)}{n}\Big) &= \\ = \int\limits_0^A F_\xi(x \cdot t)\, p_\eta(t)\, dt.&\end{aligned} \tag{9}$$

Perėję prie ribos, kai $A \to \infty$, (9) lygybės dešinėje pusėje, gauname

$$P(\xi < x \cdot \eta) = \int\limits_0^\infty F_\xi(x \cdot t)\, p_\eta(t)\, dt.$$

6.7.2 teiginys. Tegul $F_\xi(x)$ – atsitiktinio dydžio $\xi > 0$ pasiskirstymo funkcija. Tuomet atsitiktinio dydžio $\sqrt{\xi}$ pasiskirstymo funkcija yra

$$G_{\sqrt{\xi}}(x) = F_\xi(x^2), \text{ o tankio funkcija } g_{\sqrt{\xi}}(x) = 2 \cdot x \cdot f_\xi(x^2).$$

Įrodymas akivaizdus.

6.7.3 teiginys. Tegul $F_\xi(x)$ atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija. Tuomet atsitiktinio dydžio ξ^2 pasiskirstymo funkcija yra

$$G_{\xi^2}(x) = F_\xi\big(\sqrt{x}\big) - F_\xi\big(-\sqrt{x}\big),\ x > 0,$$

o atsitiktinio dydžio ξ^2 pasiskirstymo tankio funkcija yra

$$g_{\xi^2}(x) = \frac{f\big(\sqrt{x}\big) + f_\xi\big(-\sqrt{x}\big)}{2\sqrt{x}}.$$

Įrodymas akivaizdus.

6.8 Ankstesnių skyrelių rezultatų taikymai

Išsiaiškinsime, kad gama pasiskirstymo tankio funkcijų (žr. 5.2.4) sąsūka yra gama pasiskirstymo tankio funkcija.

6.8.1 teiginys.

$$f_{\alpha,\lambda} * f_{\beta,\lambda} = f_{\alpha+\beta,\lambda},$$

čia $f_{\alpha,\lambda}$, $f_{\beta,\lambda}$, $f_{\alpha+\beta,\lambda}$ – gama pasiskirstymo tankio funkcijos, kurių parametrai nurodyti indeksuose.

Įrodymas. Užrašykime funkcijų $f_{\alpha,\lambda}$ ir $f_{\alpha,\mu}$ sąsūką

$$(f_{\alpha,\lambda} * f_{\beta,\lambda})(x) = \int\limits_0^x f_{\alpha,\lambda}(x-y) f_{\beta,\lambda}(y)\,dy =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha \lambda^\beta}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x (x-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-\lambda(x-y)} e^{-\lambda y}\,dy =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x (x-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1}\,dy =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} x^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x \left(1-\frac{y}{x}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta-1} d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pažymėję $u = \dfrac{y}{x}$, gauname

$$(f_{\alpha,\lambda} * f_{\beta,\lambda})(x) = \frac{\lambda^{\alpha+\beta} x^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1}\,du.$$

Integralas

$$\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1}\, du$$

yra β integralas

$$B(\alpha,\ \beta) = \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1}\, du = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Įrašę integralo reikšmę į ankstesnę lygybę, gauname teiginio įrodymą.

6.8.2 teiginys. Tarkime, kad atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal standartinį normalųjį dėsnį. Tuomet atsitiktinis dydis ξ^2 pasiskirstęs pagal gama dėsnį su parametrais $\alpha = \lambda = \dfrac{1}{2}$.

Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio ξ^2 pasiskirstymo funkciją $F(x)$, kai $x \geqslant 0$.

Sprendimas.

$$F(x) = P\big(\xi^2 < x\big) = P\big(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\big) = \Phi\big(\sqrt{x}\big) - \Phi\big(-\sqrt{x}\big).$$

Atsitiktinio dydžio ξ^2 pasiskirstymo tankio funkcija yra lygi

$$p(x) = \frac{d}{dx}\Big(\Phi\big(\sqrt{x}\big) - \Phi\big(-\sqrt{x}\big)\Big) = \frac{1}{\pi} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = f_{\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}(x).$$

6.8.3 išvada. Jei atsitiktiniai dydžiai $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ yra nepriklausomi ir pasiskirstę pagal standartinį normalųjį dėsnį, tai atsitiktinis dydis

$$\chi_n = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$$

pasiskirstęs pagal gama dėsnį su parametrais $\alpha = \dfrac{n}{2}$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$, t. y. atsitiktinio dydžio χ_n pasiskirstymo tankio funkcija yra lygi

$$f_{\frac{n}{2},\,\frac{1}{2}}(x).$$

Ši išvada tiesiogai gaunama, pritaikius teiginių (žr. 6.8.1, 6.8.2) rezultatus.

6.8.4 teiginys. Jei atsitiktiniai dydžiai ξ ir η pasiskirstę pagal gama dėsnius su parametrais $f_{\frac{m}{2},\frac{1}{2}}$ ir $f_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$, tai atsitiktinio dydžio $\dfrac{\xi}{\eta}$ pasiskirstymo tankio funkcija yra lygi

$$f(m,n;x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad \text{čia } x > 0.$$

Sprendimas. Pritaikę teiginio rezultatą apie dviejų atsitiktinių dydžių santykio tankio funkcijos išraišką (žr. 6.7.1), gauname

$$f(m,n;x) = p_{\frac{\xi}{\eta}}(x) = \int\limits_0^\infty p_\xi(x\cdot t)\, p_\eta(t)\cdot t\, dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{(x\cdot t)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x\cdot t}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, t\, dt =$$

$$= \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_0^\infty t^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{t(x+1)}{2}}\, dt.$$

Padarę integrale kintamųjų pakeitimą $u = \dfrac{t(x+1)}{2}$, t. y. $t = \dfrac{2u}{x+1}$, gauname

$$f(m,n;x) = \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(1+x)^{\frac{m+n}{2}}} \int\limits_0^\infty u^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-u}\, du, \; x > 0.$$

Pastarasis integralas kaip tik ir yra lygus $\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)$.

6.9 χ^2, Fišerio ir Stjudento pasiskirstymai

Chi-kvadrato, Fišerio ir Stjudento pasiskirstymais pagrįsti matematinės statistikos metodai tiriant įvairius praktinius uždavinius. Todėl šiuos pasiskirstymus išskiriame į atskirą skyrelį.

6.9.1 apibrėžimas (Chi kvadrato pasiskirstymas). Jei atsitiktiniai dydžiai $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, – nepriklausomi ir pasiskirstę pagal standartinį normalųjį dėsnį, tai yra sakoma, kad atsitiktinis dydis

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$$

yra pasiskirstęs pagal chi-kvadrato dėsnį su n laisvės laipsniais. Atsitiktinio dydžio χ_n^2 pasiskirsčiusio pagal chi-kvadrato dėsnį su n laisvės laipsniais, kaip suformuluota išvadoje, tankio funkcija yra lygi

$$f_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{2^n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{-\frac{n}{2}},\ x > 0.$$

6.9.2 apibrėžimas (Fišerio pasiskirstymas). Jei atsitiktiniai dydžiai χ_m^2 ir χ_n^2 pasiskirstę pagal chi-kvadrato dėsnį su m ir n laisvės laipsniais, tai yra sakoma, kad atsitiktinis dydis

$$\frac{n\,\chi_m^2}{m\,\chi_n^2}$$

yra pasiskirstęs pagal Fišerio dėsnį su m ir n laisvės laipsniais. Atsitiktinio dydžio $\frac{\chi_m^2 n}{\chi_n^2 m}$ pasiskirstymo tankio funkcija yra lygi

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{\frac{m}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}\, x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}},\ x > 0.$$

6.9.3 pastaba. Pirmiausia pastebėsime, kad Fišerio dėsnio laisvės laipsniai m ir n gali būti bet kurie teigiami realūs skaičiai. Fišerio pasiskirstymo tankio funkcijos išraiška gaunama paprastai. Fišerio pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = P\left(\frac{\chi_m^2 n}{\chi_n^2 m} < x\right) = P\left(\frac{\chi_m^2}{\chi_n^2} < \frac{m}{n}x\right) = \int\limits_0^{\frac{m}{n}x} f(m,n;t)\,dt.$$

Išdiferencijavę šią pasiskirstymo funkciją (žr. 5.1.8), gauname

$$\frac{d}{dx}F(x) = f\Big(m, n; \frac{mx}{n}\Big) \cdot \frac{m}{n} = \frac{\Gamma\big(\frac{m+n}{2}\big)\, m^{\frac{m}{2}}\, n^{\frac{n}{2}}\, x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)\,(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}},\ x > 0.$$

6.9.4 apibrėžimas (Stjudento pasiskirstymas). Jei atsitiktiniai dydžiai ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, η – nepriklausomi ir pasiskirstę pagal standartinį normalųjį dėsnį, tai yra sakoma, kad atsitiktinis dydis

$$\frac{\eta}{\sqrt{\frac{1}{n}\Big(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2\Big)}} = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}$$

yra pasiskirstęs pagal Stjudento dėsnį su n laisvės laipsniais. Stjudento pasiskirstymo tankio funkcija yra lygi

$$\frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{2}\big)}{\sqrt{\pi\, n}\,\Gamma\big(\frac{n}{2}\big)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

6.10 Ribiniai dėsniai

Šiame skyrelyje suformuluosime keletą labai svarbių ribinių dėsnių. Formuluotės nėra bendriausios.

6.10.1 Didžiųjų skaičių dėsnis

Tegul ξ_j, čia $1 \leqslant j \leqslant n$, yra vienodai pasiskirstę, nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Jei atsitiktinio dydžio ξ_j vidurkis $E\xi_j = a$ egzistuoja, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$, kai $n \to \infty$ (n artėja į begalybę), egzistuoja riba

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) \to 0. \qquad (10)$$

6.10.2 Centrinė ribinė teorema

Tegul ξ_j, yra $1 \leqslant j \leqslant n$, vienodai pasiskirstę, nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tarkime, kad $E\xi_j = a$ ir $D\xi_j = \sigma^2$ egzistuoja.

Pažymime
$$\mathbf{S}_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$
Tuomet
$$P\Big(\alpha < \frac{\mathbf{S}_n - n\,a}{\sigma\sqrt{n}} < \beta\Big) \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \quad \text{kai } n \to \infty. \tag{11}$$

6.10.1 pavyzdys. Miestelyje gyvena 2500 gyventojų. Kiekvienas iš jų maždaug 6 kartus per mėnesį traukiniu važiuoja į miestą, visiškai atsiktinai pasirinkdamas kelionės dieną nepriklausomai nuo kitų gyventojų. Kiek mažiausiai traukinyje turėtų būti vietų, kad jis būtų perpildytas vidutiniškai nedažniau nei vieną kartą per 100 dienų (traukinys per parą važiuoja į miestą tik vieną kartą)?

Sprendimas. Pastebėsime, kad kiekvienas gyventojas su tikimybe $p = 6/30 = 1/5$ bet kurią dieną gali važiuoti į miestą, o su tikimybe $q = 4/5$ – nevažiuoti. Šiai situacijai galime pritaikyti Bernulio schemą.

Tegul ξ yra atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmę 1 su tikimybe 1/5, o reikšmę 0 su tikimybe 4/5. Atsitiktinio dydžio vidurkis $E\xi = 1/5$, o dispersija $D\xi = 4/25$. Tegul
$$\mu = \underbrace{\xi + \xi + \ldots + \xi}_{2500}.$$

Pasinaudoję centrine ribine teorema, dabar galime performuluoti klausimą taip: kokioms μ reikšmėms teisinga ši nelygybė
$$P\Big(\frac{\mu - 500}{20} < x\Big) \approx \Phi(x) = 0,99,$$
čia $E\mu = 500$ (vidutiniškai kiekvieną dieną į miestą galinčių važiuoti $2500 \cdot \dfrac{1}{5} = 500$ gyventojų skaičius), $D\mu = 400$?

Iš normaliojo pasiskirstymo dėsnio funkcijos $\Phi(x)$ reikšmių lentelės randame, kad
$$\Phi(2,36) \approx 0,99.$$
Tuomet
$$\frac{\mu - 500}{20} < 2,36 \Leftrightarrow \mu \leqslant 547.$$
Traukinyje turėtų būti mažiausiai 547 sėdimos vietos.

6.10.2 pavyzdys. Tegul žaidymo kauliukas metamas 1500 kartų. Kokia tikimybė, kad atsivertusių akučių skaičių suma pateko į intervalą $[5000,\ 5500]$?

Sprendimas. Tegul atsitiktinis dydis yra ξ, įgyjantis kiekvieną iš reikšmių

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

su tikimybe $\frac{1}{6}$. Atsitiktinio dydžio ξ vidurkis ir dispersija atitikamai lygūs

$$E\xi = \frac{7}{2},\ D\xi = \frac{35}{12}.$$

Nagrinėkime sumą

$$S_{1500} = \underbrace{\xi + \xi + \ldots + \xi}_{1500}.$$

Tikimybė

$$\begin{aligned}
&P(5000 \leqslant S_{1500} \leqslant 5500) = \\
&= P\left(\frac{5000 - ES_{1500}}{\sqrt{DS_{1500}}} \leqslant \frac{S_{1500} - ES_{1500}}{\sqrt{DS_{1500}}} \leqslant \frac{5500 - ES_{1500}}{\sqrt{DS_{1500}}}\right) = \\
&= P\left(\frac{5000 - 5250}{\sqrt{4375}} \leqslant \frac{S_{1500} - 5250}{\sqrt{4375}} \leqslant \frac{5500 - 5250}{\sqrt{4375}}\right) = \\
&= P\left(-3,78 \leqslant \frac{S_{1500} - 5250}{66,14378} \leqslant 3,78\right) \approx \\
&\approx \Phi(3,78) - \Phi(-3,78) \approx 0,9980.
\end{aligned}$$

6.10.3 Čebyševo nelygybė

Tegul atsitiktinio dydžio ξ vidurkis $E\xi = a$ ir dispersija $D\xi = \sigma^2$. Tuomet kiekvienam $\varepsilon > 0$ teisinga nelygybė

$$P\big(|\,\xi - a\,| > \varepsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon}. \tag{12}$$

7 Matematinės statistikos pagrindai

Pavyzdžiui, gyvybės draudimo kompanijos suinteresuotos žinoti, kaip nuo žmonių amžiaus, profesijos ar kitų faktorių priklauso žmonių ilgaamžiškumas. Todėl jos draudžiamuosius skirsto į įvairias rizikos grupes pagal amžių, profesiją, darbo sąlygas ir t. t., kurių asmenims ir draudimo sąlygos skirtingos. Taip gyvybės draudimo kompanijos stengiasi sumažinti savo riziką ir užsitikrinti sau pelnus.

Apklausiant įvairių visuomenės sluoksnių atstovus apie pretendentus į prezidentus, daromos prognozės, kas turi didžiausias galimybes būti išrinktam prezidentu.

Matematinės statistikos metodais galima tirti kaip darbas nepalankiomis sąlygomis arba profesija gali daryti įtaką susirgti viena ar kita liga. Nauji mokslo rezultatai dažniausiai įgalina sukurti naujas priemones, kurios iš esmės pakeičia žmonijos galimybes. Pavyzdžiui, taip atsitiko sukūrus kompiuterius ir programines įrangas, sukūrus mobiliuosius telefonus ir įvairius elektroninius prietaisus, vykdant tyrimus kosmose, žemės ir vandenynų gelmėse. Verslininkui, pasirodžius naujiems mokslo rezultatams, svarbu įvertinti, ar skirti lėšas naujam produktui sukurti, kokia bus to produkto rinkos paklausa, ką darys konkurentai, ar investicijos į naujoves atsipirks ir kiek leis uždirbti. Verslininkui labai svarbu žinoti, kaip, esant potencialioms galimybėms, pasielgti ir ką galėtų ir kaip reikėtų daryti. Moksliniai tyrinėjimai įvairiose srityse, tokiose kaip fizika, chemija, biologija, genetika pasaulyje vykdomi labai intensyviai ir susigaudyti šiame greitai besikeičiančiame mokslo pasaulyje tikrai labai sudėtinga. Todėl būtini procesų tyrimai, tyrimai, įgalinantys suvokti, suprasti ir įvertinti situacijas.

Taigi matematinės statistikos metodais tiriamos kurios nors populiacijos įvairios savybės, požymiai ir t. t. Jei populiacija gausi ir neįmanoma ištirti kiekvieno individo, o kartais tai ir beprasmiška, paprastai tai daroma parenkant iš tiriamos populiacijos atstovus, vadinama imtimi ir tiriama išrinkta imtis. Iš gautų rezultatų, ištyrus imtį, daromos išvados, prognozės apie visą populiaciją. Imties parinkimas gana sudėtinga problema. Imties parinkimas mūsų nedomins. Darysime prielaidą, kad imties parinkimas atliekamas idealiai.

Ko siekiama, atliekant tyrimus, ir kokiu pavidalu gauti atsakymai tenkintų tyrėjus? Idealiausiai būtų, jei galima būtų viską sužinoti apie tiriamą populiaciją ir jos požymius, savybes. Bet tai bendru atveju neįmanoma. Jei žinoma požymių ar savybių, kaip atsitiktinių dydžių, pasiskirstymo funkcija, tai galima daryti šiokias tokias išvadas. Matematinė statistika įgalina sudaryti empirines pasiskirstymo funkcijas. Jos pačios yra atsitiktiniai dydžiai, bet geriau ir tiek žinoti, nei nieko nežinoti. Jei yra žinoma, kokiai klasei priklauso populiacijos požymių pasiskirstymo funkcija, tai, kaip žinome iš pavyzdžių, pasiskirstymo funkcijos, priklausančios vienai ar kitai klasei, priklauso nuo parametrų. Žinant populiacijos požymių pasiskirstymo funkcijos klasę, būtina įvertinti viena ar kita prasme pasiskirstymo funkcijos parametrus. Galimi taškiniai parametrų įverčiai, galima įvertinti pasikliautiniais intervalais, į kuriuos patenka su tam tikra tikimybe nagrinėjami parametrai. Galima suformuluoti įvairias hipotezes ir, turint imties rezultatus, daryti išvadas, ar suformuluota hipotezė priimtina, ar atmestina. Pereisime prie apibrėžimų.

Norintiems išsamiai susipažinti su matematine statistika rekomenduojame J. Kubiliaus „Tikimybių teoriją“, V. Bagdonavičiaus, J. Kruopio „Matematinę statistiką“.

7.1 Pagrindinės sąvokos

7.1.1 apibrėžimas. Nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių vektorius

$$\big(X_1,\ X_2, \dots, X_n\big)$$

yra vadinamas *n-mate imtimi.*

7.1.2 apibrėžimas. Nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių

$$\big(X_1,\ X_2, \dots, X_n\big)$$

reikšmių, gautų atliekant matavimus tiriant kurio nors proceso, populiacijos požymių skaitines charakteristikas, vektorius

$$(x_1,\ x_2, \dots, x_n)$$

yra vadinamas *n-matės imties realizacija.* Skaičius n yra vadinamas *imties tūriu*, o skirtumas tarp imties realizacijos didžiausios ir mažiausios reikšmių – *imties realizacijos pločiu.*

7.1.3 apibrėžimas. Mati funkcija (žr. (5.1.1))

$$G\big(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\big),$$

priklausanti nuo imties $\big(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\big)$, yra vadinama *statistika.*

Paprasčiausios imties funkcijos yra imties empirinis vidurkis, aukštesnių eilių imties empiriniai momentai, imties empiriniai centruoti momentai ir t. t. Pateiksime šių funkcijų apibrėžimus.

7.1.4 apibrėžimas. Funkcija

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

yra vadinama imties $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ *empiriniu vidurkiu.*

7.1.5 apibrėžimas. Imties aukštesnių eilių empiriniai momentai apibrėžiami lygybėmis

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^r.$$

Imties empiriniai centruoti momentai apibrėžiami lygybėmis

$$\mu_r = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^r.$$

Imties empirinis vidurkis, aukštesnių eilių imties empiriniai momentai, imties empiriniai centruoti momentai yra statistikos.

Dažniausiai yra žinomas imties pasiskirstymo funkcijos tipas, bet nežinomi pasiskirstymo funkcijos parametrai.

7.1.6 apibrėžimas. Tegul

$$P_\theta(X_j \leqslant x) = F(x, \theta)$$

imties komponenčių pasiskirstymo funkcija, priklausanti nuo parametro θ. Funkcijos $\delta(\theta)$ nuo nežinomo parametro θ taškiniu įvertiniu yra vadinama statistika

$$\delta^*(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n),$$

įgyjanti reikšmes parametro $\delta(\theta)$ kitimo srityje. Parametro $\delta(\theta)$ taškinis įvertinys yra atsitiktinis dydis. Turint imties realizaciją

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

skaičius

$$\delta^*(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

yra vadinamas *parametro* $\delta(\theta)$ *taškiniu įverčiu.*

7.1.7 apibrėžimas. Parametro $\delta(\theta)$ taškinis įvertinys

$$\delta^*(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$$

yra vadinamas *nepaslinktuoju*, jei

$$E_\theta\Big(\delta^*\big(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n\big)\Big) = \delta(\theta),$$

čia užrašytas vidurkis pasiskirstymo funkcijos $F(x, \theta)$ atžvilgiu.

7.1.8 pavyzdys. Empirinis imties vidurkis

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

yra nepaslinktasis imties komponenčių vidurkio įvertinys. Jei egzistuoja nagrinėjamo atsitiktinio dydžio dispersija, tai empirinė dispersija

$$s^2 = \mu_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2$$

yra imties komponenčių dispersijos paslinktasis įvertis. Tuo tarpu statistika

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2$$

yra imties komponenčių dispersijos nepaslinktasis įvertis.

7.1.9 apibrėžimas. Kai turime imties

$$(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$$

realizaciją

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$

tai skaičius

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

yra *imties komponenčių vidurkio taškinis įvertis*, o

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2,$$

yra *imties komponenčių dispersijos taškinis įvertis.*

Lengva pastebėti, kad

$$s^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \ \text{čia}\ \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

7.1.10 apibrėžimas. Skaičius

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (x_j - \overline{x})^2$$

yra vadinamas *patikslinta imties komponenčių realizacijos dispersija.*

Lengva pastebėti, kad

$$s_1^2 = \frac{n}{n-1}\cdot s^2.$$

Skaičiai

$$s = \sqrt{s^2}, \ \ s_1 = \sqrt{s_1^2}$$

yra vadinami *imties realizacijos vidutiniais kvadratiniais nuokrypiais.*

7.1.11 pavyzdys. Nagrinėkime požymio reikšmių lentelę

$1,2$	$0,7$	$2,5$	$2,3$	$1,7$	$1,8$	$2,6$	$1,4$	$2,7$	$1,1$
$2,7$	$3,7$	$2,4$	$1,2$	$2,3$	$0,7$	$3,0$	$2,3$	$2,6$	$1,5$
$2,2$	$1,0$	$4,3$	$1,9$	$1,8$	$2,7$	$2,0$	$1,8$	$1,2$	$2,8$
$1,3$	$1,0$	$1,9$	$0,3$	$2,6$	$1,8$	$1,9$	$2,6$	$1,1$	$1,7$
$3,6$	$2,2$	$2,0$	$1,9$	$3,6$	$1,7$	$3,0$	$3,6$	$1,5$	$1,8$

Apskaičiuojame statistikas

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{50}\sum_{j=1}^{50} x_j = 2,064,$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{50}\sum_{j=1}^{50} (x_j - 2,064)^2 = 0,712704,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{49}\sum_{j=1}^{50} (x_j - 2,064)^2 = 0,72724898.$$

Taigi $s = 0,844218$ ir $s_1 = 0,8527889$.

7.1.12 uždavinys. Tegul $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ atsitiktinė imtis, $Ex_j = a$, $Dx_j = \sigma^2$, $E(x_j - a)^4 < \infty$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Pažymėkime

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2.$$

Įrodykite, kad tuomet

$$Es_1^2 = \sigma^2, \ \ Es = E\mu_2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

7.2 Empirinės pasiskirstymo funkcijos

Tarkime, kad nagrinėjame imtį

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,$$

ir tegul

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

yra jos realizacija. Kadangi atsitiktiniai dydžiai X_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, tai kiekvienai šių atsitiktinių dydžių realizacijos reikšmei x_j galime priskirti tikimybę $\dfrac{1}{n}$ ir sudaryti pasiskirstymo funkciją

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(x_j),$$

čia $\mathbf{1}_A$ – aibės A charakteristinė funkcija, apibrėžiama taip:

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad x \in A, \\ 0, & \text{jei} \quad x \notin A. \end{cases}$$

7.2.1 apibrėžimas. Imties realizacijai

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

užrašytoji funkcija

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(x_j)$$

yra vadinama *empirine pasiskirstymo funkcija.*

Nagrinėjant imties realizacijos duomenis, žymiai daugiau informacijos galima gauti iš duomenų pavaizdavimo histogramomis. Iš histogramų geometrinio vaizdo galima spręsti apie nagrinėjamų tolydžių vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių tankio funkcijas. Kitame skyrelyje ir aptarsime, kaip sudaromos histogramos.

7.3 Intervalinės statistinės eilutės, histogramos

Iš duomenų, gautų atliekant matavimus tiriant kurio nors proceso ar populiacijos savybes ir pavaizduotų santykinių dažnių histogramomis, galima susidaryti vaizdą apie nagrinėjamų tolydžių atsitiktinių dydžių pasiskirstymo tankio funkciją. Šiame skyrelyje aprašysime, kaip imties duomenys pavaizduojami histogramomis.

Pirmiausia tiriamo požymio reikšmių duomenis

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

surašome nemažėjimo tvarka, t. y. surašome į vadinamąją *variacinę eilutę*

$$x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \ldots \leqslant x_n^*,$$

čia

$$x_1^* = \min\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\},$$

$$x_n^* = \max\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}.$$

Po to sudarome taip vadinamąją *intervalinę statistinę eilutę*, kai intervalų skaičius lygus r. Duomenų reikšmių intervalas $[x_1^*,\ x_n^*]$ padalijamas į r vienodo ilgio intervalus:

$$[x_1^*,\ a_2),\ [a_2,\ a_3),\ \ldots\ ,[a_r,\ x_n^*].$$

Kiekvieno intervalo ilgis lygus

$$h = \frac{x_n^* - x_1^*}{r}.$$

Suskaičiuojame, kiek duomenų patenka į kiekvieną intervalą. Tarkime, kad į j-ąjį intervalą patenka n_j požymio reikšmių, $1 \leqslant j \leqslant r$. Skaičiai n_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, yra vadinami *absoliučiais dažniais.* Santykiai

$$\omega_j = \frac{n_j}{n}$$

yra vadinami *santykiniais dažniais.*

Intervalinės statistinės eilutės vaizduojamos *histogramomis*, t. y. laiptuotomis figūromis, sudarytomis iš stačiakampių. Stačiakampių pagrindas lygus h, t. y. intervalo ilgiui, o aukštis yra lygus

$$h_j = \frac{\omega_j}{h},\ \ 1 \leqslant j \leqslant r.$$

Norint nubrėžti rezultatų histogramą, patogu sudaryti lentelę.

7.3.1 pavyzdys. Tarkime bandymų stebėjimo rezultatai yra šie:

$2,928,$	$2,274,$	$4,910,$	$1,354,$	$1,864,$	$2,592,$	$1,424,$	$4,596,$
$2,120,$	$-2,550,$	$0,938,$	$1,612,$	$3,086,$	$-1,076,$	$2,374,$	$-0,38,$
$4,972,$	$1,292,$	$0,732,$	$3,394,$	$3,852,$	$4,75,$	$3,570,$	$0,074$
$4,044,$	$1,056,$	$4,558,$	$9,050,$	$3,142,$	$-1,851,$	$2,388,$	$4,384$
$4,788,$	$0,890,$	$2,092,$	$3,642,$	$7,890,$	$5,948,$	$1,484,$	$2,824$

Sprendimas. Didžiausia reikšmė yra $9,05$, o mažiausia reikšmė yra $-2,55$.

Intervalo $[-2,55,\ 9,05]$ ilgis yra lygus $11,6$. Šį intervalą padalinę į $r = 5$ lygias dalis, gauname šiuos intervalus:

$$
\begin{aligned}
&[-2,55,\ -0,23)\\
&[-0,23,\ 2,09)\\
&[2,09,\ 4,41)\\
&[4,41,\ 6,73)\\
&[6,73,\ 9,05]
\end{aligned}
$$

Kiekvieno intervalo ilgis

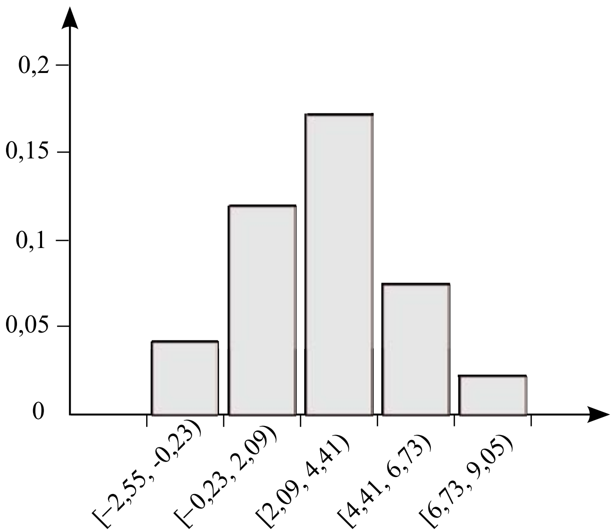
$$h = \frac{9,05 - (-2,55)}{5} = 2,32.$$

Į pirmąjį intervalą patenka $n_1 = 4$ duomenys, į antrąjį – $n_2 = 11$ duomenų, į trečiąjį – $n_3 = 16$ duomenų, į ketvirtąjį – $n_4 = 7$ duomenys, į penktąjį – $n_5 = 2$ duomenys. Santykiniai dažniai yra lygus

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{n_1}{n} = \frac{4}{40} = 0,1,\\
\omega_2 &= \frac{n_2}{n} = \frac{11}{40} = 0,275,\\
\omega_3 &= \frac{n_3}{n} = \frac{16}{40} = 0,4,\\
\omega_4 &= \frac{n_4}{n} = \frac{7}{40} = 0,175,\\
\omega_5 &= \frac{n_5}{n} = \frac{2}{40} = 0,05.
\end{aligned}
$$

Stačiakampių aukščiai yra lygūs

$$h_1 = \frac{\omega_1}{h} = \frac{0,1}{2,32} \approx 0,043,$$
$$h_2 = \frac{\omega_2}{h} = \frac{0,275}{2,32} \approx 0,119,$$
$$h_3 = \frac{\omega_3}{h} = \frac{0,4}{2,32} \approx 0,172,$$
$$h_4 = \frac{\omega_4}{h} = \frac{0,175}{2,32} \approx 0,075,$$
$$h_5 = \frac{\omega_5}{h} = \frac{0,05}{2,32} \approx 0,022.$$



9 paveikslas. 7.3.1 pavyzdžio lentelės duomenų histograma

7.4 Pasikliautinieji intervalai

Šiame skyrelyje nagrinėsime tokį uždavinį: tarkime, kad tiriame atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal žinomą pasiskirstymo dėsnio tipą

$$P_\theta\big(X_j \leqslant x\big) = F(x, \theta),$$

priklausančio nuo nežinomo parametro θ, imtį

$$X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n.$$

Kaip įvertinti nežinomą parametrą? Vienas iš nežinomo parametro įvertinimo būdų yra nurodyti pasikliautinąjį intervalą.

7.4.1 apibrėžimas. Tarkime, kad egzistuoja tokios funkcijos

$$\underline{\theta_n} = \underline{\theta_n}(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n),$$

$$\overline{\theta_n} = \overline{\theta_n}\big(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n\big),$$

kad

$$P\Big(\underline{\theta_n}\big(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n\big) < \theta < \overline{\theta_n}\big(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n\big)\Big) = \gamma$$

visoms nežinomo parametro θ reikšmėms. Tuomet intervalas

$$\Big(\underline{\theta_n}\big(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n\big),\ \overline{\theta_n}\big(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n\big)\Big)$$

yra vadinamas *pasikliautinuoju intervalu*, kuris su pasikliovimo tikimybe γ pakankamai artima vienetui padengia nežinomą parametrą. Pasikliovimo tikimybė dar vadinama *pasikliovimo lygmeniu.*

Aptarsime atvejį, kai atsitiktinis dydis pasiskirstęs pagal normalinį dėsnį $N(a, \sigma^2)$. Kadangi normalinio dėsnio pasiskirstymo funkcija priklauso nuo dviejų parametrų a ir σ^2, nagrinėsime šiuos atvejus:

1. Tarkime, kad vidurkis a nežinomas, o dispersija σ^2 yra žinoma. Kaip rasti vidurkio a pasikliautinąjį intervalą?

2. Tarkime, kad vidurkis a ir dispersija σ^2 yra nežinomi. Kaip rasti vidurkio a pasikliautinąjį intervalą?

3. Tarkime, kad vidurkis a ir dispersija σ^2 yra nežinomi. Kaip rasti vidutinio kvadratinio nuokrypio σ pasikliautinąjį intervalą?

Tegul

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

imties

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,$$

realizacijos rezultatai, stebint atsitiktinį dydį, pasiskirsčiusį pagal normalinį dėsnį $N(a, \sigma^2)$. Turėdami imties realizacijos rezultatus, sudarome skaičius:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j,$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2.$$

Kiekvienu aukščiau išvardytu atveju pateiksime formules parametrų a ir σ^2 pasikliautiniesiems intervalams apskaičiuoti pasirinkę pasikliovimo lygmenį γ, artimą vienetui.

- Jei normaliojo atsitiktinio dydžio dispersija σ^2 yra žinoma, tai vidurkio pasikliautinis intervalas, pasirinkus pasikliovimo lygmenį $\gamma = 1 - 2\alpha$, apibrėžiamas formule

  $$(\underline{a},\ \overline{a}) = \left(\overline{x} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

  t. y.

  $$P\left(\overline{x} - u_{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + u_{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma,$$

  čia $u_\alpha = u_{\frac{1-\gamma}{2}}$ – standartinio normaliojo skirstinio α kritinė reikšmė. Ši kritinė reikšmė apibrėžiama iš lygybės

  $$P(\xi \geqslant u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha$$

  ir randama standartinio normalinio pasiskirstymo funkcijos reikšmių lentelėje.

- Kai dispersija nežinoma, tai vidurkio pasikliautinis intervalas, pasirinkus pasikliovimo lygmenį $\gamma = 1 - 2\alpha$, apibrėžiamas formule

$$(\underline{a}, \overline{a}) = \left(\overline{x} - t_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}\frac{s_1}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}\frac{s_1}{\sqrt{n}}\right),$$

t. y.

$$P\left(\overline{x} - t_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}}\right) = \gamma,$$

čia

$t_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}$ – Stjudento skirstinio su $\nu = n-1$ laisvės laipsniais,

$\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$ – kritinė reikšmė, kuri randama Stjudento skirstinio su $n-1$ laisvės laipsniais reikšmių lentelėje.

- Kai vidurkis nežinomas, tai dispersijos pasikliautinis intervalas, pasirinkus pasikliovimo lygmenį $\gamma = 1 - 2\alpha$, apibrėžiamas formule

$$(\underline{\sigma^2}, \overline{\sigma^2}) = \left(\frac{(n-1)s_1^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}},\ \frac{(n-1)s_1^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}}\right),$$

t. y.

$$P\left(\frac{\sqrt{n-1}s_1}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}}} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}s_1}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}}}\right) = \gamma,$$

čia

$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}$ ir $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}$ yra χ^2 skirstinio su $\nu = n-1$ laisvės laipsniais,

$\dfrac{1-\gamma}{2}$ ir $\dfrac{1+\gamma}{2}$ – kritinės reikšmės. Jos randamos chi kvadrato pasiskirstymo funkcijos su $n-1$ laisvės laipsniais reikšmių lentelėje.

7.4.2 pavyzdys. Tarkime, kad žinoma, jog atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, kurio dispersija lygi 4. Atliktų bandymų stebėjimo rezultatai yra šie:

$$\begin{array}{cccccccc} -2,550, & 2,120, & 0,938, & 1,612, & 3,086, & -1,076, & 2,374, & -0,38, \\ 2,928, & 2,274, & 4,910, & 1,354, & 1,864, & 2,592, & 1,424, & 4,596, \\ 1,056, & 4,558, & 4,044, & 9,050, & 3,142, & -1,851, & 2,388, & 4,384 \\ 4,972, & 1,292, & 0,732, & 3,394, & 3,852, & 4,75, & 3,570, & 0,074 \\ 0,890, & 2,092, & 3,642, & 4,788, & 7,890, & 5,948, & 1,484, & 2,824 \end{array}$$

Pasirinkę pasikliovimo lygmenį

$$\gamma = 1 - 2\alpha = 0,95,$$

raskite tiriamo atsitiktinio dydžio vidurkio pasikliautinąjį intervalą.

Sprendimas. Apskaičiuojame

$$\bar{x} = \frac{1}{40}\sum_{j=1}^{40} x_j = 2,675775.$$

Kadangi $\alpha = 0,025$, tai normaliojo pasiskirstymo funkcijos reikšmių lentelėje randame $u_{0,025} = 1,96$. Ieškomas pasikliautinasis intervalas yra

$$\begin{aligned} &\left(\overline{x} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \\ =&\left(2,675775 - u_{0,025}\frac{2}{\sqrt{40}},\ 2,675775 + u_{0,025}\frac{2}{\sqrt{40}}\right) = \\ =&\left(2,675775 - \frac{1,96\cdot 2}{6,3245553},\ 2,675775 + \frac{1,96\cdot 2}{6,3245553}\right) = \\ =&\big(2,0559686,\ 3,2955814\big). \end{aligned}$$

7.4.3 pavyzdys. Tarkime, kad žinoma, jog atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, kurio dispersija nežinoma. Atliktų bandymų stebėjimo rezultatai yra šie:

$-2,550,$	$2,120,$	$0,938,$	$1,612,$	$3,086,$	$-1,076,$	$2,374,$	$-0,38,$
$2,928,$	$2,274,$	$4,910,$	$1,354,$	$1,864,$	$2,592,$	$1,424,$	$4,596,$
$1,056,$	$4,558,$	$4,044,$	$9,050,$	$3,142,$	$-1,851,$	$2,388,$	$4,384$
$4,972,$	$1,292,$	$0,732,$	$3,394,$	$3,852,$	$4,75,$	$3,570,$	$0,074$
$0,890,$	$2,092,$	$3,642,$	$4,788,$	$7,890,$	$5,948,$	$1,484,$	$2,824$

Pasirinkę pasikliovimo lygmenį

$$\gamma = 1 - 2\alpha = 0,95,$$

raskite tiriamo atsitiktinio dydžio vidurkio pasikliautinąjį intervalą.

Sprendimas. Apskaičiuojame $\bar{x}$ ir s_1:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{40}\sum_{j=1}^{40} x_j = 2,675775,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{39}\sum_{j=1}^{40}(x_j - 2,675775)^2 = 5,620102.$$

Taigi $s_1 = 2,3706754$. Ieškomas pasikliautinasis intervalas yra

$$\left(\overline{x} - t_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}\frac{s_1}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}\frac{s_1}{\sqrt{n}}\right),$$

čia

$t_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}$ – Stjudento skirstinio su $\nu = n-1$ laisvės laipsniais,

$\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$ – kritinė reikšmė, randama Stjudento skirstinio su $n-1$ laisvės laipsniais reikšmių lentelėje.

Mūsų atveju

$$\alpha = \frac{1-\gamma}{2} = 0,025 \ \text{ir}\ \ n-1 = 40-1 = 39.$$

Stjudento skirstinio su 39 laisvės laipsniais reikšmių lentelėje randame kritinę reikšmę

$$t_{0,025,\,39} = 1,95996.$$

Galutinai gauname

$$
\begin{aligned}
&\left(\overline{x} - t_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}\frac{s_1}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}\frac{s_1}{\sqrt{n}}\right) = \\
=&\left(2,675775 - 1,95996\tfrac{2,3706754}{\sqrt{40}},\ 2,675775 + 1,95996\tfrac{2,3706754}{\sqrt{40}}\right) = \\
=&(2,675775 - 0,7346649,\ 2,675775 + 0,7346649) = \\
=&(1,9411101,\ 3,4104399).
\end{aligned}
$$

7.5 Hipotezių tikrinimas

Tarkime, atlikę matavimus, iš gautų duomenų norite išsiaiškinti tiriamo objekto skaitines savybes. Paprastai tariant, atliekami atsitiktinio dydžio matavimai. Gali būti, kad iš anksto žinoma, pagal kokį dėsnį yra pasiskirsčiusios tiriamo objekto skaitinės savybės, bet nežinomos parametrų reikšmės, nuo kurių priklauso šis dėsnis. Pavyzdžiui, vienmatis normalusis pasiskirstymo dėsnis priklauso nuo dviejų parametrų, eksponentinis dėsnis priklauso nuo vieno parametro, tolygusis pasiskirstymo dėsnis – nuo dviejų parametrų, Puasono – nuo vieno parametro ir t. t. Gali būti, kad nėra žinoma pagal kokį dėsnį yra pasiskirstęs tiriamas atsitiktinis dydis, o iš gautų matavimo duomenų būtina kaip tik išsiaiškinti ir nuspręsti, kaip pasiskirsčiusios tiriamo objekto skaitinės savybės. Tuo tikslu, turint matavimo duomenis, suformuluojama hipotezė apie tiriamą savybę (arba hipotezė ir jai alternatyva) ir pasinaudojant vienu ar kitu hipotezių priėmimo statistiniu kriterijumi, hipotezė priimama arba atmetama (arba atmetama hipotezė ir priimama alternatyva).

Hipotezių priėmimas ar atmetimas atliekamas pagal schemą. Pirmiausia pastebėsime, kad galimi atvejai:

- hipotezė teisinga ir, remiantis hipotezių priėmimo statistiniu kriterijumi, hipotezė priimama;
- hipotezė teisinga ir, remiantis hipotezių priėmimo statistiniu kriterijumi, hipotezė atmetama. Šis atvejis įvardijamas kaip pirmos rūšies klaida;

- hipotezė neteisinga ir, remiantis hipotezių priėmimo statistiniu kriterijumi, hipotezė priimama. Šis atvejis įvardijamas kaip antros rūšies klaida.

Bendra hipotezių priėmimo ar atmetimo schema yra tokia:

- Suformulavę hipotezę H apie nagrinėjamos imties
$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,$$
atsitiktinių dydžių pasiskirstymo savybes, parenkama statistika
$$T(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n),$$
apie kurią žinoma, pagal kokį pasiskirstymo dėsnį $F(x)$ ji yra pasiskirsčiusi suformuluotos hipotezės atveju.

- Tuomet parenkamas pakankamai mažas $\alpha \in (0,1)$, vadinamas *reikšmingumo lygmeniu*, taip, kad būtų hipotezės atmetimo tikimybė $\beta \leqslant \alpha$.

  Paprastai α parenkamas iš šių skaičių: $0,1,\ 0,05,\ 0,01$. Dažniausiai apibrėžiama kritinė sritis
$$K = \{x \geqslant k_\alpha\},$$
čia k_α apibrėžiamas iš lygybės
$$F(k_\alpha) = 1 - \alpha.$$

- Turint imties realizacijos duomenis
$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$
apskaičiuojama parinktos statistikos reikšmė
$$t_n = T(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n).$$

- Hipotezė H priimama, jei $t_n \notin K$ ir hipotezė atmetama, jei $t_n \in K$.

Kituose skyreliuose išdėstysime konkrečius hipotezių priėmimo ir atmetimo kriterijus.

7.6 Stjudento kriterijus

Tegul

$$X_1,\ X_2, \ldots, X_n$$

yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę pagal normalųjį dėsnį $N(a, \sigma^2)$ atsitiktiniai dydžiai, kurių vidurkis a ir dispersija σ^2 nežinomi. Stjudento kriterijus, pasirinkus pasikliovimo lygmenį, taikomas, turint imties realizacijos duomenis, priimant ar atmetant hipotezę $H_0 : a = a_0$ (t. y. priimant hipotezės alternatyvą $H_1 : a \neq a_0$) apie atsitiktinių dydžių vidurkio reikšmę. Iš imties realizacijos duomenų

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

sudaromi parametrų a ir σ^2 reikšmių taškiniai įverčiai

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j,\ s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2.$$

Yra žinoma, kad atsitiktiniai dydžiai

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \ \text{ ir } \ S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2$$

yra nepriklausomi. Stjudento kriterijus pagrįstas statistika (atsitiktiniu dydžiu)

$$T_{n-1} = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - a_0}{S_1}.$$

Jei hipotezė H_0 teisinga, tai T_{n-1} pasiskirstęs pagal Stjudento dėsnį su $n-1$ laisvės laipsniais, t. y.

$$P\big(T_{n-1} < x \,|\, H_0\big) = 2S_{n-1}(x) - 1, \ \text{ čia } \ x > 0,$$

čia $S_{n-1}(x)$ – Stjudento su $n-1$ laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcija.

Tegul

$$t_{n-1} = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - a_0}{s_1}$$

skaičius, sudarytas iš imties realizacijos duomenų. Remiantis Stjudento kriterijumi, pasirinkus reikšmingumo lygmenį $0 < \alpha < 0,05$, hipotezė H_0 priimama, jei

$$|t_{n-1}| = \left|\sqrt{n}\frac{\bar{x} - a_0}{s_1}\right| < t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1},$$

čia $t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ – Stjudento su $n-1$ laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcijos $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ lygmens kvantilis, t. y. lygties

$$S_{n-1}(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

sprendinys.

Jei

$$|t_{n-1}| = \left|\sqrt{n}\frac{\bar{x} - a_0}{s_1}\right| \geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1},$$

tai lygmeniu α hipotezė H_0 atmetama ir priimama alternatyva $H_1 : a \neq a_0$.

7.7 Chi kvadrato kriterijus

Turint atsitiktinio tolydaus dydžio, kurio skirstinys nežinomas, reikšmių imtį, galima pabandyti išsiaiškinti, pagal kokį dėsnį pasiskirstęs atsitiktinis dydis. Tuo tikslu suformuluojama hipotezė H. Iš imties duomenų, remiantis vienu ar kitu statistiniu kriterijumi, reikia nuspręsti, ar hipotezė gali būti priimta, ar ją reikia atmesti.

Prieš formuluojant hipotezę, iš imties realizacijos duomenų sudaroma histograma. Nubrėžę histogramą, iš histogramos pavidalo galima spręsti apie atsitiktinio tolydaus dydžio tankio funkciją.

Išnagrinėsime atvejus, kuriems galima taikyti chi kvadrato kriterijų priimant ar atmetant hipotezę.

- Histogramos pavidalas primena atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, tankio funkciją. Iš duomenų apskaičiuojame

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j,$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2,$$

kurie yra atsitiktinio tolydaus dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, vidurkio ir dispersijos taškiniai įverčiai. Šiuo atveju tikimybė, kad atsitiktinio dydžio reikšmės patenka į konkretų intervalą $[x_1, x_2]$, apskaičiuojama pagal formulę

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ s}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(t-\overline{x})^2}{2s^2}}\,dt.$$

- Histogramos pavidalas primena atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal eksponentinį dėsnį, tankio funkciją. Iš duomenų apskaičiuojame empirinį vidurkį

  $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

  ir eksponentinio dėsnio parametro λ taškinį įvertį

  $$\lambda = \frac{1}{\overline{x}}.$$

  Šiuo atveju tikimybė, kad atsitiktinio dydžio reikšmės patenka į konkretų intervalą $[x_1, x_2]$, apskaičiuojama pagal formulę

  $$F(x_2) - F(x_1) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}, \ \text{kai} \ x_2 > x_1 \geqslant 0.$$

- Tarkime, kad histogramos pavidalas primena atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal tolygų dėsnį intervale $[a,\ b]$, tankio funkciją. Iš duomenų apskaičiuojame skaičiai

  $$a = \min\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\},$$

  $$b = \max\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}.$$

  Dabar tikimybė, kad atsitiktinio dydžio reikšmės patenka į konkretų intervalą $[x_1, x_2]$ apskaičiuojama pagal formulę

  $$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{b-a}(x_2 - x_1), \ \text{kai} \ a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b.$$

- Anksčiau išvardytuose atvejuose kalbama apie tolydžius atsitiktinius dydžius. Šį kartą aptarsime atvejį, kai atsitiktinis dydis įgyja sveikas neneigiamas reikšmes. Reikės išsiaiškinti, ar atsitiktinis dydis pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį. Tarkime, kad, atliekant stebėjimus, gauti duomenys surašyti į lentelę

ξ	0	1	2	...	r
	n_0	n_1	n_2	...	n_r

čia n_j yra tyrimo metu atsitiktinio dydžio ξ įgytos reikšmės j dažnis, $0 \leqslant j \leqslant r$. Iš šių duomenų apskaičiuojame Puasono pasiskirstymo atveju empirinį vidurkį

$$\lambda = \frac{\Sigma_{j=1}^{r} j}{\Sigma_{j=0}^{r} n_j}.$$

Dabar tikimybė, kad atsitiktinis dydis įgyja reikšmę j, $j \geqslant 0$, apskaičiuojama pagal formulę

$$P(\xi = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}.$$

Prieš aprašant chi kvadrato kriterijų, taikomą hipotezei apie atsitiktinio dydžio pasiskirtymo dėsnį anksčiau aprašytais atvejais priimti ar atmesti, priminsime, kaip prieš sudarant histogramą, tam tikru būdu sutvarkomi atliktų matavimų duomenys. Tie duomenys reikalingi Pirsono statistikos reikšmei apskaičiuoti. Priklausomai nuo to, ar ši Pirsono statistikos reikšmė, gauta iš matavimo duomenų, hipotetiškai pasiskirsčiusių pagal vieną iš išvardytų tolydžių atsitiktinių dydžių pasiskirstymo dėsnių, nepatenka ar patenka į nurodytą kritinę sritį, hipotezė apie atsitiktinio dydžio pasiskirtymo dėsnį priimama ar atmetama.

Tiriamo požymio reikšmių duomenys

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

pirmiausia surašomi nemažėjimo tvarka, t. y. surašomi į variacinę eilutę

$$x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \ldots \leqslant x_n^*,$$

čia

$$x_1^* = \min\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\},$$
$$x_n^* = \max\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}.$$

Po to sudaroma intervalinė statistinė eilutė, kai intervalų skaičius lygus r. Duomenų reikšmių intervalas $[x_1^*,\ x_n^*]$ padalijamas į r vienodo ilgio intervalus:

$$[x_1^*,\ a_2),\ [a_2,\ a_3),\ \ldots\ ,[a_r,\ x_n^*].$$

Kiekvieno intervalo ilgis lygus

$$h = \frac{x_n^* - x_1^*}{r}.$$

Suskaičiuojama, kiek duomenų patenka į kiekvieną intervalą. Tarkime, kad į j-ąjį intervalą patenka n_j požymio reikšmių, $1 \leqslant j \leqslant r$.

Visais užrašytais tolydžiųjų atsitiktinių dydžių atvejais nagrinėjama Pirsono statistikos reikšmė

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(np_j - n_j)^2}{np_j},$$

čia n – duomenų skaičius, r – intervalų skaičius, n_j – absoliutūs dažniai, $1 \leqslant j \leqslant r$. Tikimybės p_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, apskaičiuojamos taip:

$$\begin{aligned}
&p_1 = F(a_2),\\
&p_j = F(a_{j+1}) - F(a_j),\ \ 2 \leqslant j \leqslant r-2,\\
&p_r = 1 - F(a_r),
\end{aligned}$$

čia $F(x)$ – hipotetinė pasiskirstymo funkcija, priklausanti nuo s parametrų, viena iš anksčiau aprašytų atvejų.

Pasirinkus reikšmingumo lygmenį α, apibrėžiama kritinė sritis

$$K = [\chi^2_{\alpha,r-1-s}, \infty),$$

čia

$\chi^2_{\alpha,r-1-s}$ – chi kvadrato su $\nu = r-1-s$ laisvės laipsniais,

α – kritinė reikšmė,

s – kaip jau minėjome, parametrų, nuo kurių priklauso hipotetinė pasiskirstymo funkcija F, skaičius.

Hipotetinio Puasono pasiskirstymo dėsnio atveju, apskaičiuojant Pirsono statistikos reikšmę iš gautų duomenų, tikimybės p_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, apskaičiuojamos šitaip:

$$p_j = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \quad 0 \leqslant j \leqslant r - 1,$$

$$p_r = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} p_j.$$

Toliau elgiamasi taip, kaip ir pirmaisiais trimis atvejais.

7.7.1 pavyzdys. Tarkime bandymų stebėjimo rezultatai yra šie:

2,928,	2,274,	4,910,	1,354,	1,864,	2,592,	1,424,	4,596,
2,120,	−2,550,	0,938,	1,612,	3,086,	−1,076,	2,374,	−0,38,
4,972,	1,292,	0,732,	3,394,	3,852,	4,75,	3,570,	0,074
4,044,	1,056,	4,558,	9,050,	3,142,	−1,851,	2,388,	4,384
4,788,	0,890,	2,092,	3,642,	7,890,	5,948,	1,484,	2,824

Išsiaiškinkite, pagal kurį dėsnį stebimas atsiktinis dydis, kurio stebėjimo rezultatai surašyti pateiktoje lentelėje, yra pasiskirstęs.

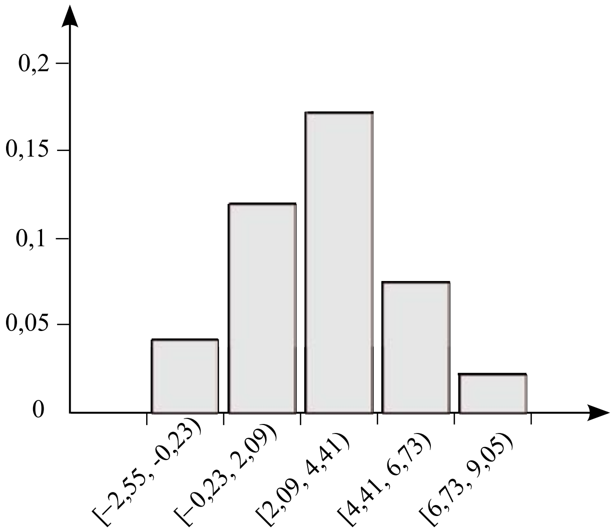
Sprendimas. Didžiausia reikšmė yra $9,05$, o mažiausia reikšmė yra $-2,55$. Intervalo $[-2,55,\ 9,05]$ ilgis yra lygus $11,6$. Šį intervalą padaliję į $r = 5$ lygias dalis, gauname šiuos intervalus:

$$[-2,55,\ -0,23)$$
$$[-0,23,\ 2,09)$$
$$[2,09,\ 4,41)$$
$$[4,41,\ 6,73)$$
$$[6,73,\ 9,05]$$

Kiekvieno intervalo ilgis

$$h = \frac{9,05 - (-2,55)}{5} = 2,32.$$

Į pirmąjį intervalą patenka $n_1 = 4$ duomenys, į antrąjį – $n_2 = 11$ duomenų, į trečiąjį – $n_3 = 16$ duomenų, į ketvirtąjį – $n_4 = 7$ duomenys, į penktąjį – $n_5 = 2$ duomenys.



10 paveikslas. 7.7.1 pavyzdžio lentelės duomenų histograma

Iš histogramos vaizdo formuluojame hipotezę, kad nagrinėjamas atsitiktinis dydis pasiskirstęs pagal normalinį dėsnį.

Apskaičiuosime $\bar{x}$ ir s:

$$\bar{x} = \frac{18{,}852+2{,}962+13{,}23+19{,}052+19{,}834+10{,}363+11{,}24+11{,}498}{40} \approx 2,676.$$

Panašiai apskaičiuojame

$$s^2 = \frac{1}{40}\sum_{j=1}^{40}(x_j - 2,675775)^2 \approx 5,3426061$$

Tarę, kad atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal normalinį dėsnį su parametrais $\bar{x} = 2,675775$ ir $s \approx 2,3114078$, galime apskaičiuoti tikimybes p_j, $1 \leqslant j \leqslant 5$. Apskaičiuojant šias tikimybes, parametrų reikšmes apvalinsime iki dviejų skaitmenų po kablelio: $\bar{x} \approx 2,68$ ir $s \approx 2,31$.

Pirmiausia apskaičiuojame reikšmes

$$\Phi\left(\frac{-0,23-2,68}{2,31}\right) \approx \Phi(-1,26) = 0,1038,$$

$$\Phi\left(\frac{2,09-2,68}{2,31}\right) \approx \Phi(-0,26) = 0,3974,$$

$$\Phi\left(\frac{4,41-2,68}{2,31}\right) \approx \Phi(0,75) = 0,7734,$$

$$\Phi\left(\frac{6,73-2,68}{2,31}\right) \approx \Phi(1,75) = 0,9599,$$

$$\Phi\left(\frac{9,05-2,68}{2,31}\right) \approx \Phi(2,76) = 0,9971.$$

Tuomet

$$\begin{aligned}
p_1 &\approx \Phi\left(\frac{-0,23-2,68}{2,31}\right) = 0,1038,\\
p_2 &\approx \Phi\left(\frac{2,09-2,68}{2,31}\right) - \Phi\left(\frac{-0,23-2,68}{2,31}\right) =\\
&= 0,3974 - 0,1038 = 0,2936,\\
p_3 &\approx \Phi\left(\frac{4,41-2,68}{2,31}\right) - \Phi\left(\frac{2,09-2,68}{2,31}\right) =\\
&= 0,7734 - 0,3974 = 0,376,\\
p_4 &\approx \Phi\left(\frac{6,73-2,68}{2,31}\right) - \Phi\left(\frac{4,41-2,68}{2,31}\right) =\\
&= 0,9599 - 0,7734 = 0,1865,\\
p_5 &\approx 1 - \Phi\left(\frac{6,73-2,68}{2,31}\right) = 1 - 0,9599 = 0,0401.
\end{aligned}$$

Žinomos ir duomenų dažnių intervaluose reikšmės:

$$n_1 = 4,\ n_2 = 11,\ n_3 = 16,\ n_4 = 7,\ n_5 = 2.$$

Taigi galime apskaičiuoti Pirsono statistikos reikšmę:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{5} \frac{(40p_j - n_j)^2}{np_j} \approx$$
$$\approx \frac{0,023104}{4,152} + \frac{0,553536}{11,744} + \frac{0,9216}{15,04} + \frac{0,2116}{7,46} + \frac{0,156816}{1,604} \approx$$
$$\approx 0,0055645 + 0,0471335 + 0,0612765+$$
$$+ 0,0283646 + 0,0977655 \approx 0,108176.$$

Apskaičiuojame chi kvadrato laisvės laipsnius:

$$\nu = 5 - 2 - 1 = 2,$$

nes normalusis pasiskirstymas priklauso nuo dviejų parametrų.

Pasirinkus reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$, chi kvadrato su 2 laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcijos reikšmių lentelėse randame chi kvadrato $\alpha = 0,05$ kritinę reikšmę $\chi^2_{0,05,\ 2} = 5,99146$.

Kadangi

$$\chi^2 \approx 0,108176 < 5,99146 = \chi^2_{0,05,\ 2},$$

tai hipotezė, kad atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, priimama.

7.7.2 pavyzdys. Atsitiktinis dydis ξ įgyja reikšmes 0, 1, 2, ... Atlikti matavimai, kurių rezultatai surašyti į lentelę, kurios antroje eilutėje nurodyti atsitiktinio dydžio įgytų reikšmių kartotinumai.

0	1	2	3	4	5	6	7
10	9	8	6	1	3	2	1

Pasirinkus reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$, ar galima priimti hipotezę, kad atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį?

Sprendimas. Pirmiausia, apskaičiuosime vidurkį:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{10 + 9 + 8 + 6 + 1 + 3 + 2 + 1} = \frac{81}{40}.$$

Apskaičiuojame tikimybes $P(\xi = j)$, $0 \leqslant j \leqslant 7$,

$$\begin{aligned}
p_o &= P(\xi = 0) = e^{-2{,}025} \approx 0,135,\\
p_1 &= P(\xi = 1) = 2,025 \cdot e^{-2{,}025} \approx 0,271,\\
p_2 &= P(\xi = 2) = \frac{(2,025)^2}{2!} \cdot e^{-2{,}025} \approx 0,271,\\
p_3 &= P(\xi = 3) = \frac{(2,025)^3}{2!} \cdot e^{-2{,}025} \approx 0,180,\\
p_4 &= P(\xi = 4) = \frac{(2,025)^4}{4!} \cdot e^{-2{,}025} \approx 0,09,\\
p_5 &= P(\xi = 5) = \frac{(2,025)^5}{5!} \cdot e^{-2{,}025} \approx 0,036,\\
p_6 &= P(\xi = 6) = \frac{(2,025)^6}{6!} \cdot e^{-2{,}025} \approx 0,012,\\
p_7 &= P(\xi \geqslant 7) = 1 - (0,135 + 0,271 + 0,271+\\
&\quad + 0,18 + 0,09 + 0,036 + 0,012) = 0,005.
\end{aligned}$$

Apskaičiuojame Pirsono statistikos reikšmę.

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(np_j - n_j)^2}{np_j} = \sum_{j=0}^{7} \frac{(40p_j - n_j)^2}{40p_j}.$$

Įrašę duomenis, gauname

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \frac{21,16}{5,4} + \frac{3,3856}{10,84} + \frac{8,0656}{10,84} + \frac{1,44}{7,2}+\\
&\quad + \frac{6,76}{3,6} + \frac{2,4336}{1,44} + \frac{2,3104}{0,48} + \frac{0,64}{0,2} \approx\\
&\approx 3,919 + 0,312 + 0,744 + 0,2+\\
&\quad + 1,878 + 1,69 + 4,813 + 3,2 = 16,756.
\end{aligned}$$

Apskaičiuojame laisvės laipsnius:

$$\nu = 8 - 1 - 1 = 6.$$

Chi kvadrato su 6 laisvės laipsniais pasiskirstymo funkcijos reikšmių lentelėse randame chi kvadrato $\alpha = 0,05$ kritinę reikšmę

$$\chi^2_{0{,}05,\,6} = 12,59159.$$

Kadangi

$$\chi^2 = 16,756 > 12,59159 = \chi^2_{0{,}05,\,6},$$

tai hipotezė, pasirinkus reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,05$, kad tiriamasis atsitiktinis dydis ξ pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį, atmetama.

8 Tolydžios funkcijos ir integralai

8.1 Tolydžios funkcijos ir kai kurios jų savybės

Kalbant apie tolydžių atsitiktinių dydžių pasiskirstymo bei tankio funkcijas, būtina žinoti šį bei tą apie apibrėžtinius integralus. Mes aptarsime tolydžių atsitiktinių dydžių tik tolydžias tankio funkcijas. Todėl pradėsime tolydžių funkcijų apibrėžimu ir suformuluosime tolydžių funkcijų kai kurias savybes. Toliau kalbėsime apie tolydžių funkcijų apibrėžtinius integralus.

8.1.1 apibrėžimas. Realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibis X yra vadinamas *aprėžtu iš viršaus*, jei egzistuoja tokia konstanta A, kad kiekvienam $x \in X$, $x \leqslant A$.

Realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibis X yra vadinamas *aprėžtu iš apačios*, jei egzistuoja tokia konstanta B, kad kiekvienam $x \in X$, $x \geqslant B$.

Realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibis X yra vadinamas *aprėžtu*, jei jis aprėžtas iš viršaus ir iš apačios.

8.1.2 apibrėžimas. Skaičius A yra vadinamas realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibio X tiksliuoju viršutiniu rėžiu, jei

1. Kiekvienam $x \in X$, $x \leqslant A$;
2. Kiekvienam $\varepsilon > 0$, egzistuoja toks $\tilde{x} \in X$, kad $A - \varepsilon < \tilde{x} \leqslant A$.

Jei realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibiui X egzistuoja tikslus viršutinis rėžis, tai jis yra žymimas $\sup\limits_{x \in X}\{x\}$ arba $\sup X$.

Skaičius B yra vadinamas realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibio X *tiksliuoju apatiniu rėžiu*, jei

1. kiekvienam $x \in X$, $B \leqslant x$;
2. kiekvienam $\varepsilon > 0$, egzistuoja toks $\tilde{x} \in X$, kad $B \leqslant \tilde{x} < A + \varepsilon$.

Jei realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ poaibiui X egzistuoja tikslus apatinis rėžis, tai jis yra žymimas $\inf\limits_{x \in X}\{x\}$ arba $\inf X$.

Realiųjų skaičių svarbi savybė. Kiekvienam aprėžtam iš viršaus realiųjų skaičių poaibiui egzistuoja tikslus viršutinis rėžis. Kiekvienam aprėžtam iš apačios realiųjų skaičių poaibiui egzistuoja tikslus apatinis rėžis.

8.1.3 apibrėžimas. Funkcija $f(x)$, apibrėžta baigtiniame uždarame intervale $[a, b]$, yra *tolydi taške* $x_0 \in (a,\ b)$, jei

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkcija $f(x)$ *tolydi intervale* (a, b), jei ji tolydi kiekviename šio intervalo taške.

$f(x)$ tolydi taške a, jei

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a).$$

$f(x)$ tolydi taške b, jei

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b).$$

Nagrinėsime tolydžių funkcijų apibrėžtinius integralus. Tuo tikslu svarbu žinoti kai kuriuos faktus apie tolydžias funkcijas.

8.1.4 Teorema (Veijerštraso teorema). Tolydi funkcija $f(x)$, apibrėžta baigtiniame uždarame intervale $[a, b]$,

1) yra aprėžta, t. y. egzistuoja tokios konstantos A ir B, kad

$$A \leqslant f(x) \leqslant B$$

kiekvienam $x \in [a, b]$;

2) funkcija $f(x)$ intervale $[a, b]$ pasiekia savo tikslų apatinį rėžį

$$m = \inf_{x \in X} f(x)$$

ir tikslų viršutinį rėžį

$$M = \sup_{x \in X} f(x),$$

t. y. egzistuoja tokie taškai $x_0, x_1 \in [a, b]$, kad

$$f(x_0) = m \ \text{ ir } \ f(x_1) = M.$$

8.1.5 pastaba. Paprastais žodžiais tariant, tolydi funkcija $f(x)$, apibrėžta baigtiniame uždarame intervale $[a, b]$, įgyja savo mažiausią ir didžiausią reikšmes.

8.1.6 Teorema (Koši teorema). Tolydi funkcija $f(x)$, apibrėžta baigtiniame uždarame intervale $[a, b]$ įgyja intervale $[a, b]$ visas tarpines reikšmes tarp funkcijos $f(x)$ mažiausios m ir didžiausios M reikšmių, t. y. kiekvienam skaičiui $c \in [m, M]$ egzistuoja toks $\tilde{x} \in [a, b]$, kad $f(\tilde{x}) = c$.

8.2 Integralai ir paprasčiausios jų savybės

Tolydžios funkcijos $f(x)$, apibrėžtos baigtiniame intervale $[a, b]$, apibrėžtinis integralas $\int\limits_a^b f(x)dx$ apibrėžiamas kaip riba

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}.$$

Ši riba, kaip nesunku įrodyti, egzistuoja. Jei funkcija $f(x)$ visame intervale $[a, b]$ neneigiama, tai apibrėžtinio integralo $\int_a^b f(x)dx$ reikšmė suprantama kaip figūros (kreivos trapecijos), apribotos iš viršaus kreive $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, iš apačios – atkarpa $(a + t(b - a),\ 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, o iš šonų – atkarpomis $\big(a, tf(a)\big)$ ir $\big(b, tf(b)\big)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, plotas. Taigi apibrėžtinių integralų reikšmes galima interpretuoti, kaip sudėtingų figūrų plotų apibrėžimą.

Apibrėžtinį integralą $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $a \leqslant x \leqslant b$, galime nagrinėti kaip viršutinio rėžio funkciją. Įsitikinsime, kad ši funkcija diferencijuojama kiekviename intervalo (a, b) taške. Norint įrodyti šį teiginį, pirmiausia būtina įrodyti paprastą lygybę.

8.2.1 teiginys. Egzistuoja toks $\theta \in [\alpha, \beta]$, kad

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt = f(\theta)(\beta - \alpha),\ a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b.$$

Šį teiginį galima interpretuoti geometriškai: egzistuoja lygiaplotis kreivai trapecijai stačiakampis, kurio pagrindas sutampa su kreivos trapecijos pagrindu $\big(\alpha + t(\beta - \alpha),\ 0\big)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, o aukštis lygus $f(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$.

Įrodymas. Kadangi $f(x)$ tolydi funkcija intervale $[a, b]$, tai ji tolydi ir siauresniame intervale $[\alpha, \beta]$. Veijerštraso teorema teigia, kad $f(x)$ intervale $[\alpha,\ \beta]$ įgyja mažiausią m ir didžiausią M reikšmes.

Vadinasi,

$$m(\beta - \alpha) \leqslant \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt \leqslant M(\beta - \alpha).$$

Padaliję šią nelygybę iš $\beta - \alpha$, gauname

$$m \leqslant \frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt \leqslant M.$$

Koši teorema teigia, kad egzistuoja toks θ, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, kad

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = f(\theta).$$

Įrodymas baigtas.

Dabar suformuluosime ir įrodysime teiginį.

8.2.2 teiginys. Funkcija

$$F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\, dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

diferencijuojama kiekviename intervalo (a, b) taške ir jos išvestinė taške $x \in (a, b)$ lygi $f(x)$.

Įrodymas.

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} f(t)\,dt =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(\theta), \quad \text{kai } \ x \leqslant \theta \leqslant x+h.$$

Kadangi funkcija $f(x)$ tolydi, tai $\lim\limits_{h\to 0} f(\theta) = f(x)$.

8.3 Netiesioginiai integralai

Apibrėžtinis integralas vadinamas *netiesioginiu*, jei vienas iš rėžių yra $\pm\infty$ arba pointegrinė funkcija kai kuriuose intervalo, pagal kurį integruojame, taškuose neapibrėžta ar turi kitokias ypatybes. Netiesioginis integralas apibrėžiamas taip:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{A\to-\infty}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A}^{B} f(t)\,dt.$$

Jei egzistuoja baigtinė riba, tai sakoma, kad *netiesioginis integralas egzistuoja* arba *konverguoja*. Priešingu atveju sakoma, kad netiesioginis *integralas diverguoja*. Panašiai apibrėžiami ir kiti netiesioginiai integralai.

Išnagrinėsime pavyzdžius.

8.3.1 pavyzdys. Apskaičiuosime integralo

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

reikšmę.

Pagal netiesioginio integralo apibrėžimą

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to\infty}}\int\limits_{A}^{B} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to\infty}} \operatorname{arctg}(x)\Big|_{A}^{B} =$$

$$= \lim_{B\to\infty}\operatorname{arctg}(B) - \lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg}(A) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

8.3.2 pavyzdys. Įsitikinsime, kad integralas

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

diverguoja.

$$\lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to\infty}} \int\limits_{A}^{B} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\B\to\infty}} \frac{1}{2}\ln\bigl(1+x^2\bigr)\Big|_A^B.$$

Kadangi ribos

$$\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2}\ln\bigl(1+B^2\bigr) - \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{2}\ln\bigl(1+A^2\bigr)$$

neegzistuoja, tai pagal apibrėžimą nagrinėjamas netiesioginis integralas diverguoja. Šiam nagrinėjamam integralui galima suteikti baigtinę reikšmę Koši prasme. Bet mūsų tai nedomina.

8.3.3 pavyzdys. Nesunku įrodyti, kad netiesioginiai integralai

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\,dx, \quad n \geqslant 1,$$

egzistuoja, nes funkcijos $\dfrac{1}{1+x^{2n}}$ greičiau gęsta, kai $x \to \pm\infty$, nei funkcija $\dfrac{1}{1+x^2}$.

8.3.4 pavyzdys. Integralas

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

egzistuoja, nes funkcija e^{-x^2} greičiau gęsta, kai $x \to \pm\infty$, nei funkcijos

$$\frac{1}{1+x^{2n}}, \quad n \geqslant 1.$$

Iš tikrųjų, bet kuriam $n \geqslant 1$, pritaikę Lopitalio taisyklę, gauname

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^{2n}}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1+x^{2n})'}{(e^{x^2})'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2nx^{2n-1}}{2xe^{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{nx^{2n-2}}{e^{x^2}}=\ldots=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(1+x^{2n})^{(m)}}{(e^{x^2})^{(m)}}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{2n-2m}}{e^{x^2}}=\ldots=0,$$

čia m reiškinyje $(1+x^{2n})^{(m)}$ rodo, kiek kartų funkcija $1+x^{2n}$ išdiferencijuota.

Integralo

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

reikšmė yra žinoma.

Štai kaip šio integralo reikšmė randama. Pirmiausia pastebėsime, kad

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx+\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Čia pasinaudojome integralų lygybe

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx=-\int\limits_{0}^{-\infty} e^{-x^2}\,dx=\int\limits_{0}^{-\infty} e^{-x^2}\,d(-x)=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Pastaroji lygybė galima, nes funkcija e^{-x^2} yra lyginė.

Galime užrašyti

$$\left(\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y^2}\,dy=\iint\limits_{x\geqslant 0,y\geqslant 0} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Suintegruosime šį dvilypį integralą pagal plokštumos visą pirmąjį ketvirtį. Tuo tikslu atliksime kintamųjų pakeitimą: pereisime prie polinių koordinačių. Pažymėkime

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ 0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2.$$

Tuomet

$$dx\,dy = r d\,r d\varphi,\ \ x^2 + y^2 = r^2.$$

Taigi

$$\iint\limits_{x\geqslant 0, y\geqslant 0} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{0\leqslant r\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2}} e^{-r^2}\,r d\,r d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{2}\lim_{A\to\infty}\int\limits_0^{A} e^{-r^2} r\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{4}\lim_{A\to\infty}\int\limits_0^{A} e^{-r^2}\,dr^2 = -\frac{\pi}{4}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-r^2}\Big|_0^A\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-A^2} - e^0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Gavome, kad

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

taip pat ir kad

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Dabar apskaičiuosime integralo $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$ reikšmę. Tuo tikslu integrale padarę kintamojo pakeitimą

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}},$$

gauname

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{2\pi}.$$

Pagaliau galime užrašyti

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

Funkcija

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

yra atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, skirstinys su parametrais 0 ir 1 (atsitiktinio dydžio vidurkiu ir dispersija).

Lentelės

1 lentelė. Funkcijos $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2}$ reikšmės

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002

1 lentelės pabaiga. Funkcijos $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/2}$ reikšmės

	6	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

2 lentelė. Funkcijos $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ reikšmės

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973

2 lentelės pabaiga. Funkcijos $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$ reikšmės

x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$	x	$\Phi_0(x)$
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,94	0,4984
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	3,00	0,4987
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	3,20	0,4993
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	3,60	0,4998
0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	4,00	0,4999

3 lentelė. Funkcijos $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$ reikšmės

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,01	0,5040	0,51	0,6950	1,01	0,8438	1,51	0,9345	2,02	0,9783
0,02	0,5080	0,52	0,6985	1,02	0,8461	1,52	0,9357	2,04	0,9793
0,03	0,5120	0,53	0,7019	1,03	0,8485	1,53	0,9370	2,06	0,9803
0,04	0,5160	0,54	0,7054	1,04	0,8508	1,54	0,9382	2,08	0,9812
0,05	0,5199	0,55	0,7088	1,05	0,8531	1,55	0,9394	2,10	0,9821
0,06	0,5239	0,56	0,7123	1,06	0,8554	1,56	0,9406	2,12	0,983
0,07	0,5279	0,57	0,7157	1,07	0,8577	1,57	0,9418	2,14	0,9838
0,08	0,5319	0,58	0,7190	1,08	0,8599	1,58	0,9429	2,16	0,9846
0,09	0,5359	0,59	0,7224	1,09	0,8621	1,59	0,9441	2,18	0,9854
0,10	0,5398	0,60	0,7257	1,10	0,8643	1,60	0,9452	2,20	0,9861
0,11	0,5438	0,61	0,7291	1,11	0,8665	1,61	0,9463	2,22	0,9868
0,12	0,5478	0,62	0,7324	1,12	0,8686	1,62	0,9474	2,24	0,9875
0,13	0,5517	0,63	0,7357	1,13	0,8708	1,63	0,9484	2,26	0,9881
0,14	0,5557	0,64	0,7389	1,14	0,8729	1,64	0,9495	2,28	0,9887
0,15	0,5596	0,65	0,7422	1,15	0,8749	1,65	0,9505	2,30	0,9893
0,16	0,5636	0,66	0,7454	1,16	0,8770	1,66	0,9515	2,32	0,9898
0,17	0,5675	0,67	0,7486	1,17	0,8790	1,67	0,9525	2,34	0,9904
0,18	0,5714	0,68	0,7517	1,18	0,8810	1,68	0,9535	2,36	0,9909
0,19	0,5753	0,69	0,7549	1,19	0,8830	1,69	0,9545	2,38	0,9913
0,20	0,5793	0,70	0,7580	1,20	0,8849	1,70	0,9554	2,40	0,9918
0,21	0,5832	0,71	0,7611	1,21	0,8869	1,71	0,9564	2,42	0,9922
0,22	0,5871	0,72	0,7642	1,22	0,8883	1,72	0,9573	2,44	0,9927
0,23	0,5910	0,73	0,7673	1,23	0,8907	1,73	0,9582	2,46	0,9931
0,24	0,5948	0,74	0,7703	1,24	0,8925	1,74	0,9591	2,48	0,9934
0,25	0,5987	0,75	0,7734	1,25	0,8944	1,75	0,9599	2,50	0,9938
0,26	0,6026	0,76	0,7764	1,26	0,8962	1,76	0,9608	2,52	0,9941
0,27	0,6064	0,77	0,7794	1,27	0,8980	1,77	0,9616	2,54	0,9945
0,28	0,6103	0,78	0,7823	1,28	0,8997	1,78	0,9625	2,56	0,9948
0,29	0,6141	0,79	0,7852	1,29	0,9015	1,79	0,9633	2,58	0,9951
0,30	0,6179	0,80	0,7881	1,30	0,9032	1,80	0,9641	2,60	0,9953
0,31	0,6217	0,81	0,7910	1,31	0,9049	1,81	0,9649	2,62	0,9956
0,32	0,6255	0,82	0,7939	1,32	0,9066	1,82	0,9656	2,64	0,9959
0,33	0,6293	0,83	0,7967	1,33	0,9082	1,83	0,9664	2,66	0,9961
0,34	0,6331	0,84	0,7995	1,34	0,9099	1,84	0,9671	2,68	0,9963
0,35	0,6368	0,85	0,8023	1,35	0,9115	1,85	0,9678	2,70	0,9965
0,36	0,6406	0,86	0,8051	1,36	0,9131	1,86	0,9686	2,72	0,9967
0,37	0,6443	0,87	0,8078	1,37	0,9147	1,87	0,9693	2,74	0,9969
0,38	0,6480	0,88	0,8106	1,38	0,9162	1,88	0,9699	2,76	0,9971
0,39	0,6517	0,89	0,8133	1,39	0,9177	1,89	0,9706	2,78	0,9973

3 lentelės pabaiga. Funkcijos $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$ reikšmės

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,30	0,6179	0,80	0,7881	1,30	0,9032	1,80	0,9641	2,60	0,9953
0,31	0,6217	0,81	0,7910	1,31	0,9049	1,81	0,9649	2,62	0,9956
0,32	0,6255	0,82	0,7939	1,32	0,9066	1,82	0,9656	2,64	0,9959
0,33	0,6293	0,83	0,7967	1,33	0,9082	1,83	0,9664	2,66	0,9961
0,34	0,6331	0,84	0,7995	1,34	0,9099	1,84	0,9671	2,68	0,9963
0,35	0,6368	0,85	0,8023	1,35	0,9115	1,85	0,9678	2,70	0,9965
0,36	0,6406	0,86	0,8051	1,36	0,9131	1,86	0,9686	2,72	0,9967
0,37	0,6443	0,87	0,8078	1,37	0,9147	1,87	0,9693	2,74	0,9969
0,38	0,6480	0,88	0,8106	1,38	0,9162	1,88	0,9699	2,76	0,9971
0,39	0,6517	0,89	0,8133	1,39	0,9177	1,89	0,9706	2,78	0,9973
0,40	0,6554	0,90	0,8159	1,40	0,9192	1,90	0,9713	2,80	0,9974
0,41	0,6591	0,91	0,8186	1,41	0,9207	1,91	0,9719	2,82	0,9976
0,42	0,6628	0,92	0,8212	1,42	0,9222	1,92	0,9726	2,84	0,9977
0,43	0,6664	0,93	0,8238	1,43	0,9236	1,93	0,9732	2,86	0,9979
0,44	0,6700	0,94	0,8264	1,44	0,9251	1,94	0,9738	2,88	0,9980
0,45	0,6736	0,95	0,8289	1,45	0,9265	1,95	0,9744	2,90	0,9981
0,46	0,6772	0,96	0,8315	1,46	0,9279	1,96	0,9750	2,94	0,9984
0,47	0,6808	0,97	0,8340	1,47	0,9292	1,97	0,9756	3,00	0,9987
0,48	0,6844	0,98	0,8365	1,48	0,9306	1,98	0,9761	3,20	0,9993
0,49	0,6879	0,99	0,8389	1,49	0,9319	1,99	0,9767	3,60	0,9998
0,50	0,6915	1,00	0,8413	1,50	0,9332	2,00	0,9772	4,00	0,9999

Literatūra

[1] Apynis, A.; Stankus, E. *Matematika*: Vadovėlis su taikymo ekonomikoje pavyzdžiais. Vilnius: TEV, 2001.

[2] Aksomaitis, J. *Tikimybių teorija ir statistika:* Vadovėlis aukštųjų mokyklų studentams. Kaunas: Technologija, 2000.

[3] Bakštys, A. *Statistika ir tikimybė:* Vadovėlis aukštųjų mokyklų studentams. Vilnius: TEV, 2006.

[4] Čekanavičius, V.; Murauskas, G. *Statistika ir jos taikymai I.* Vilnius: TEV, 2004.

[5] Janušauskaitė, S. ir kiti. *Diferencialinės lygtys ir tikimybių teorija.* Kaunas: Technologija, 2008.

[6] Kosareva, N.; Krylovas, A. *Tikimybių teorijos santrauka ir žinių pasitikrinimo testai:* Mokomoji knyga. Vilnius: Technika, 2009.

[7] Kubilius, J. *Tikimybių teorija ir matematinė statistika:* Vadovėlis. Vilnius: Mokslas, 1980.

[8] Markšaitis, H. V.; Sajadian, O. *Tiesinės algebros ir matematinės analizės pradmenys:* Mokomasis leidinys. Vilnius: Mykolo Romerio universiteto leidybos centras, 2010.

[9] Bačinskas, A. ir kiti. *Tikimybių teorijos ir statistikos praktikumas:* Mokomoji knyga. Kaunas: Technologija, 2004.

[10] Feller W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. 1, 3rd Edition. Wiley, 1968.

[11] Feller W. *An An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. 2. Wiley, 1971.

Markšaitis, Hamletas
Navickienė, Olga

Ma468 TIKIMYBIŲ TEORIJA IR MATEMATINĖ STATISTIKA. Mokomasis leidinys. – Vilnius: Mykolo Romerio universiteto leidyba, 2012. 185 p., iliustr.

Bibliogr. 184 p.

ISBN 978-9955-19-391-3

Mokymo priemonėje aptariamos ir išaiškinamos kombinatorikos, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pagrindinės sąvokos, nagrinėjami įvairių klasių uždavinių sprendimo metodai, pateikiama daug uždavinių sprendimo pavyzdžių ir pratimų su atsakymais. Leidinys naudingas norintiems savarankiškai perprasti ir įsisavinti tikimybių teorijos ir matematinės statistikos faktus. Mokymo priemonėje išdėstyti faktai yra pagrindas, siekiant tikimybinius metodus taikyti ekonomikoje, informatikoje ir kitose mokslo srityse.

UDK 519.2(075.8)

Hamletas Markšaitis
Olga Navickienė

TIKIMYBIŲ TEORIJA IR MATEMATINĖ STATISTIKA

Mokomasis leidinys

Redagavo *Zita Markūnaitė*
Viršelio dailininkė *Dovilė Petrauskienė*
Maketavo *Olga Navickienė*

SL 585. 2011 12 15. 8,3 leidyb. apsk. l.
Tiražas 100 egz.
Išleido Mykolo Romerio universitetas
Ateities g. 20, Vilnius
Redagavo UAB „Baltijos kopija“
Kareivių g. 13b, Vilnius
Puslapis internete www.kopija.lt
El. paštas info@kopija.lt
Spausdino UAB „Vitae Litera“
Kurpių g. 5-3, Kaunas
Puslapis internete www.bpg.lt
El. paštas info@bpg.lt